

BỘ CÂU HỎI THI KẾT THÚC HỌC PHẦN
(dành cho bậc đào tạo đại học hệ chính quy)

- Tên học phần: **Đại số tuyến tính**
- Mã học phần: **TOA1023** - Số tín chỉ: **3**
- Thời gian làm bài: **120 phút** (Không kể thời gian phát/chép đề)
- Loại đề: Được sử dụng tài liệu ☐ Không được sử dụng tài liệu ☒

I. PHẦN CÂU HỎI

KHỐI 1.

Câu 1.1 (2 điểm):

Trong không gian vector thực $\mathbb{R}^3$, cho hệ vector

$$\{u_1 = (1; 1; 2), u_2 = (1; 2; 1), u_3 = (2; 3; m)\}.$$

- a) Xác định m sao cho $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
- b) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\{u_1, u_2, u_3\}$ sang cơ sở chính tắc.

Câu 1.2 (2 điểm):

Trong không gian vector thực $\mathbb{R}^5$, cho các vector

$$u_1 = (1; 2; 3; -4; 5), u_2 = (-2; 1; 0; 3; -6), u_3 = (3; -5; -7; 9; -2),$$

$$u_4 = (3; 0; -1; 4; 2), u_5 = (-1; -3; -7; 15; -14),$$

$$w_1 = (1; 1; 13; -43; 37), w_2 = (1; 2; 15; -40; 34), w_3 = (1; 0; 11; -46; 40).$$

Xét các không gian con $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle$ và $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ của $\mathbb{R}^5$. Tìm số chiều của $U, W, U + W, U \cap W$.

Câu 1.3 (2 điểm):

Cho hai cơ sở của không gian vector thực $\mathbb{R}^4$:

$$\{v_1 = (1; 1; 1; 0), v_2 = (1; 1; 0; 1), v_3 = (1; 0; 1; 1), v_4 = (0; 1; 1; 1)\},$$

$$\{e_1 = (4; 4; 7; 6), e_2 = (10; 9; 11; 12), e_3 = (9; 8; 11; 11), e_4 = (9; 9; 10; 11)\}.$$

Tìm ma trận đổi cơ sở từ cơ sở $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sang cơ sở $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Câu 1.4 (2 điểm):

Cho hai tập hợp của không gian vector thực $\mathbb{R}^n$:

$$U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + \dots + x_n = 0\}, W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 = \dots = x_n\}.$$

- a) Chứng minh rằng U, W là các không gian con của $\mathbb{R}^n$. Tìm một cơ sở và số chiều của chúng.
- b) Chứng minh rằng $\mathbb{R}^n = U \oplus W$.

Câu 1.5 (2 điểm):

Cho V là một không gian vector trên trường $\mathbb{K}$, giả sử V có một cơ sở là $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Chứng minh rằng các vector w_1, w_2, w_3, w_4 xác định như sau:

$$w_1 = v_1 + v_2, w_2 = v_2 + v_3, w_3 = v_3 + v_4, w_4 = v_4$$

cũng lập thành một cơ sở của V . Tìm ma trận đổi cơ sở từ cơ sở $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ sang cơ sở $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Câu 1.6 (2 điểm):

Cho V là một không gian vector thực có cơ sở là $\{e_1, e_2\}$. Đặt $\epsilon_1 = ae_1 + be_2$ và $\epsilon_2 = ce_1 + de_2$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- a) Tìm điều kiện của a, b, c, d để $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ là một cơ sở của V .

b) Cho tự đồng cấu $f : V \rightarrow V$ có ma trận theo cơ sở $\{e_1, e_2\}$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Giả sử $ad - bc = 1$, hãy tìm ma trận của f trong cơ sở $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$.

Câu 1.7 (2 điểm):

Cho U và V_1, V_2 là các không gian con của $\mathbb{K}$ -không gian vector V . Chứng minh rằng:

$$(U \cap V_1) + (U \cap V_2) \subseteq U \cap (V_1 + V_2).$$

Tìm một ví dụ để có bao hàm thức thực sự.

Câu 1.8 (2 điểm):

Kí hiệu $\mathbb{R}_3[x]$ là không gian vector thực gồm các đa thức một biến x hệ số thực bậc không quá 3. Trong $\mathbb{R}_3[x]$ cho các vector $v_1 = 1, v_2 = 1 + x, v_3 = x + x^2, v_4 = x^2 + x^3$.

a) Chứng minh rằng $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Tìm tọa độ của $v = 2 + 3x - x^2 + 2x^3$ đối với cơ sở B .

Câu 1.9 (2 điểm):

Kí hiệu $\mathbb{R}_3[x]$ là không gian vector thực gồm các đa thức một biến x hệ số thực bậc không quá 3. Hãy tìm hạng của hệ vector sau trong $\mathbb{R}_3[x]$

$$\{v_1 = 1 + x^2 + x^3, v_2 = x - x^2 + 2x^3, v_3 = 2 + x + 3x^3, v_4 = -1 + x - x^2 + 2x^3\}.$$

Câu 1.10 (2 điểm):

Trong không gian vector thực $\mathbb{R}^4$ cho các vector

$$v_1 = (1; 0; 1; 0), v_2 = (0; 1; -1; 1), v_3 = (1; 1; 1; 2), v_4 = (0; 0; 1; 1).$$

Đặt $V_1 = \langle v_1, v_2 \rangle, V_2 = \langle v_3, v_4 \rangle$, hãy tìm số chiều và xác định cơ sở của các không gian vector $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

KHỎI 2.

Câu 2.1 (2 điểm):

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$ và ánh xạ $f : M(2, \mathbb{R}) \rightarrow M(2, \mathbb{R})$ xác định bởi $f(X) = AX - XA$.

a) Chứng minh rằng f là một ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm cơ sở và số chiều của $\text{Im} f$ và $\text{Ker} f$.

Câu 2.2 (2 điểm):

Tự đồng cấu φ của không gian vector 4-chiều V có ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

theo cơ sở $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ của V . Hãy tìm ma trận của φ theo cơ sở sau của V :

$$\{u_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, u_2 = e_1 + e_2 + e_3, u_3 = e_1 + e_2, u_4 = e_1\}.$$

Câu 2.3 (2 điểm):

Cho tự đồng cấu f của không gian vector thực $\mathbb{R}^4$ xác định bởi:

$f(x_1; x_2; x_3; x_4) = (x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4; 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4; 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4; 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4)$.
 Tìm cơ sở và số chiều của $\text{Im} f$ và $\text{Ker} f$.

Câu 2.4 (2 điểm):

Cho V và W là hai không gian con hữu hạn chiều của một không gian vector. Xét ánh xạ $f : V \times W \rightarrow V + W$ cho bởi $f(v, w) = v + w, v \in V, w \in W$.

- a) Chứng minh f là một toàn cấu và $\text{Ker}(f)$ đẳng cấu với $V \cap W$.
- b) Suy ra $\dim(V) + \dim(W) = \dim(V + W) + \dim(V \cap W)$.

Câu 2.5 (2 điểm):

Cho $\mathbb{R}_2[t] = \{f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 | a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0, 2}\}$ là không gian vector thực (gồm các đa thức hệ số thực có bậc ≤ 2). Xét ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t], a_0 + a_1t + a_2t^2 \mapsto a_0 + a_1t$.

- a) Chứng minh rằng φ là một ánh xạ tuyến tính.
- b) Tìm một cơ sở và xác định số chiều của $\text{Im} \varphi, \text{Ker} \varphi$.

Câu 2.6 (2 điểm):

Kí hiệu $\mathbb{R}_n[x]$ là không gian vector thực gồm các đa thức hệ số thực có bậc không quá n . Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_6[x]$ xác định bởi:

$$f(P(x)) = (3x^2 - 4x + 2)P(x) - (4x^3 - 5x^2 + x - 3)P'(x),$$

trong đó $P'(x)$ là đạo hàm của $P(x)$.

- a) Chứng minh rằng f là một ánh xạ tuyến tính.
- b) Tìm ma trận của f theo cặp cơ sở $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ và $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$.

Câu 2.7 (2 điểm):

Cho tự đồng cấu tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ có ma trận theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Tìm ma trận của f theo cơ sở $S = \{u_1 = (1; 0; -1), u_2 = (0; 1; 1), u_3 = (1; 1; 2)\}$.
- b) Với mỗi số nguyên dương n , hãy tính A^n .

Câu 2.8 (2 điểm):

Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 - x_3; x_1 - x_2 + x_3; -x_1 + x_2 + x_3).$$

- a) Chứng minh rằng f là một ánh xạ tuyến tính.
- b) Tìm ma trận của f đối với cơ sở $\{v_1 = (1; 0; 0), v_2 = (1; 1; 0), v_3 = (1; 1; 1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Câu 2.9 (2 điểm):

Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1; x_2; x_3) = (2x_1; x_2 - x_3)$.

- a) Chứng minh rằng f là một ánh xạ tuyến tính.
- b) Tìm một cơ sở và xác định số chiều của $\text{Im} f, \text{Ker} f$.

Câu 2.10 (2 điểm):

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1; x_2) = (x_1 + x_2; x_1 - x_2; x_1 + 2x_2).$$

- a) Hãy xác định ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$.
b) Tìm một cơ sở và xác định số chiều của $\text{Im} f$, $\text{Ker} f$.

KHỐI 3.

Câu 3.1 (2 điểm):

Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_{n-1} + bx_n = 1 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_{n-1} + bx_n = 1 \\ \cdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_{n-1} + bx_n = n - 1 \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_{n-1} + ax_n = n \end{cases}.$$

Tìm điều kiện của a và b để hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 3.2 (2 điểm):

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số thực λ :

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}.$$

Câu 3.3 (2 điểm):

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau bằng phương pháp phép biến đổi sơ cấp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Câu 3.4 (2 điểm):

Giải hệ phương trình hệ số thực sau bằng quy tắc Cramer:

$$\begin{cases} 3x - 2z & = 3 \\ x + 3y + 5t & = 0 \\ y + 4z + t & = -1 \\ -2y - z - 4t & = 0 \end{cases}.$$

Câu 3.5 (2 điểm):

Giải hệ phương trình hệ số thực sau bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 3t & = 1 \\ -x - 2y + 5z - 2t & = -3 \\ x + 2y - 3z + 4t & = 5 \\ -2x - 4y + 10z - 4t & = 6 \end{cases}.$$

Câu 3.6 (2 điểm):

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số thực m :

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 1 \end{cases}.$$

Câu 3.7 (2 điểm):

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số thực a :

$$\begin{cases} (2-a)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (2-a)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2-a)x_3 = 0 \end{cases}.$$

Câu 3.8 (2 điểm):

Giải hệ phương trình hệ số thực sau bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}.$$

Câu 3.9 (2 điểm):

Tìm điều kiện của λ để hệ phương trình hệ số thực sau có vô số nghiệm:

$$\begin{cases} x + 2y + \lambda z = -1 \\ 2x + 7y + (2\lambda + 1)z = 2 \\ 3x + 9y + 4\lambda z = 1 \end{cases}.$$

Câu 3.10 (2 điểm):

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số thực a :

$$\begin{cases} x_1 - ax_2 + a^2x_3 = a \\ ax_1 - a^2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + x_2 - a^3x_3 = 1 \end{cases}.$$

KHỐI 4.

Câu 4.1 (2 điểm):

Cho ma trận hệ số thực:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 1 \\ -4 & 7 & -4 \\ 1 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Tìm các giá trị riêng của A và các không gian con riêng tương ứng với các giá trị riêng đó. Ma trận A có chéo hóa được không? Nếu có hãy tìm ma trận khả nghịch C sao cho $C^{-1}AC$ là ma trận chéo.

Câu 4.2 (2 điểm):

Cho ma trận hệ số thực:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Tìm các giá trị riêng của A và các không gian con riêng tương ứng với các giá trị riêng đó. Ma trận A có chéo hóa được không? Nếu có hãy tìm ma trận khả nghịch C sao cho $C^{-1}AC$ là ma trận chéo.

Câu 4.3 (2 điểm):

Cho ma trận hệ số thực:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Tìm các giá trị riêng của A và các không gian con riêng tương ứng với các giá trị riêng đó. Ma trận A có chéo hóa được không? Nếu có hãy tìm ma trận khả nghịch C sao cho $C^{-1}AC$ là ma trận chéo.

Câu 4.4 (2 điểm):

Cho ma trận hệ số thực $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Hãy chéo hóa ma trận A (nếu được).

b) Tính $\det(A^{2013})$ và $\text{trace}(A^{2013})$. Ở đây, với mỗi ma trận vuông X , $\text{trace}(X)$ là tổng các phần tử trên đường chéo chính của X .

Câu 4.5 (2 điểm):

Cho f là một tự đồng cấu của không gian vector thực $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - 3x_2 + 3x_3; 3x_1 - 5x_2 + 3x_3; 6x_1 - 6x_2 + 4x_3).$$

a) Tìm các giá trị riêng và vector riêng tương ứng của f .

b) Xác định một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận của f theo cơ sở này là ma trận chéo.

Câu 4.6 (2 điểm):

Cho ma trận hệ số thực:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tìm các giá trị riêng của A và các không gian con riêng tương ứng với các giá trị riêng đó. Ma trận A có chéo hóa được không? Nếu có hãy tìm ma trận khả nghịch C sao cho $C^{-1}AC$ là ma trận chéo.

Câu 4.7 (2 điểm):

Cho tự đồng cấu $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ xác định như sau:

$$f(x_1; x_2; x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3; 2x_1 - 3x_2 + 2x_3; -2x_2 + 3x_3).$$

Tự đồng cấu f chéo hóa được hay không? Nếu được hãy chéo hóa f .

Câu 4.8 (2 điểm):

Cho tự đồng cấu $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ xác định như sau:

$f(x_1; x_2; x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3; x_1 + 2x_2 + x_3; x_1 + x_2 + 2x_3)$.
Tự đồng cấu f chéo hóa được hay không? Nếu được hãy chéo hóa f .

Câu 4.9 (2 điểm):

Cho ma trận hệ số thực:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tìm các giá trị riêng của A và các không gian con riêng tương ứng với các giá trị riêng đó. Ma trận A có chéo hóa được không? Nếu có hãy tìm ma trận khả nghịch C sao cho $C^{-1}AC$ là ma trận chéo.

Câu 4.10 (2 điểm):

Kí hiệu $\mathbb{R}_2[x]$ là không gian vector thực gồm các đa thức một biến x hệ số thực có bậc không quá 2. Cho tự đồng cấu $f \in \text{End}(\mathbb{R}_2[x])$ xác định như sau:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2.$$

Hãy tìm các giá trị riêng của f và các vector riêng ứng với các giá trị riêng đó.

KHỎI 5.

Câu 5.1 (2 điểm):

Kí hiệu $M(n, \mathbb{R})$ là không gian vector thực gồm các ma trận vuông cấp n hệ số thực. Chứng minh rằng các ma trận vuông đối xứng cấp n hệ số thực lập thành một không gian vector con của $M(n, \mathbb{R})$. Tìm số chiều và một cơ sở cho không gian vector con đó.

Câu 5.2 (2 điểm):

Giả sử V_1, V_2 là các không gian vector con của V . Chứng minh rằng nếu $\dim V_1 + \dim V_2 > \dim V$ thì $V_1 \cap V_2$ chứa ít nhất một vector khác không.

Câu 5.3 (2 điểm):

Giả sử V_1, V_2 là các không gian vector con của V . Chứng minh rằng nếu $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$ thì $V_1 + V_2$ trùng với một trong hai không gian con đã cho, còn $V_1 \cap V_2$ trùng với không gian con còn lại.

Câu 5.4 (2 điểm):

Chứng minh rằng ma trận thực $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thỏa mãn phương trình

$$X^2 - (a + d)X + (ad - bc)I_2 = 0$$

trong đó I_2 là ma trận đơn vị cấp 2.

Câu 5.5 (2 điểm):

Cho tự đồng cấu $\varphi : V \rightarrow V$ thỏa mãn điều kiện $\varphi^2 = \varphi$. Chứng minh rằng $V = \text{Im}\varphi \oplus \text{Ker}\varphi$.

Câu 5.6 (2 điểm):

Cho ánh xạ $\text{Tr} : M(3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\text{Tr}(A) = \text{tổng các phần tử trên đường chéo chính của } A.$$

Chứng minh rằng Tr là một đồng cấu và tìm một cơ sở cho hạt nhân của Tr .

Câu 5.7 (2 điểm):

Cho A là ma trận vuông cấp n hệ số thực, giả sử A^2 có một giá trị riêng là 4. Chứng minh rằng 2 hoặc -2 là giá trị riêng của A .

Câu 5.8 (2 điểm):

Cho $f : V \rightarrow V$ là một ánh xạ tuyến tính, $x \in V$ và m là số nguyên dương thỏa mãn $f^m(x) = 0$, $f^{m-1}(x) \neq 0$. Chứng minh rằng hệ vectơ $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{m-1}(x)\}$ là độc lập tuyến tính.

Câu 5.9 (2 điểm):

Cho A là ma trận vuông cấp n có tất cả phần tử là số nguyên chẵn. Chứng minh rằng A không thể có giá trị riêng là một số nguyên lẻ.

Câu 5.10 (2 điểm):

Cho $f : V \rightarrow V'$ là ánh xạ tuyến tính, W là không gian con của V và W' là không gian con của V' . Chứng minh rằng:

a) $f^{-1}(f(W)) = W + \text{Ker } f$.

b) $f(f^{-1}(W')) = W' \cap \text{Im } f$.

II. PHẦN ĐÁP ÁN

KHỐI 1.

Câu 1.1 (2 điểm):

a) (1 điểm) $m \neq 3$.

b) (1 điểm) Ma trận đổi cơ sở là $C = \begin{pmatrix} \frac{2m-3}{m-3} & \frac{-m+2}{m-3} & \frac{-1}{m-3} \\ \frac{-m+6}{m-3} & \frac{m-4}{m-3} & \frac{-1}{m-3} \\ \frac{-3}{m-3} & \frac{1}{m-3} & \frac{1}{m-3} \end{pmatrix}$.

Câu 1.2 (2 điểm): $\dim U = 3$ (0, 5 điểm), $\dim W = 2$ (0, 5 điểm), $\dim(U + W) = 4$, (0, 5 điểm), $\dim U \cap W = 1$ (0, 5 điểm).

Câu 1.3 (2 điểm): Ma trận đổi cơ sở là $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Câu 1.4 (2 điểm):

a) (1, 5 điểm) Kiểm tra U là một không gian con và xác định một cơ sở của U (0, 5 điểm). Kiểm tra W là một không gian con và xác định một cơ sở của W (0, 5 điểm). Chỉ ra $\dim U = n - 1$ và $\dim W = 1$ (0, 5 điểm).

b) Chứng minh $U \cap W = \{0\}$ để suy ra $\mathbb{R}^n = U \oplus W$ (0, 5 điểm).

Câu 1.5 (2 điểm): Kiểm tra được hệ $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ độc lập tuyến tính và do $\dim V = 4$ nên ta có $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ là một cơ sở của V (1 điểm).

Ma trận đổi cơ sở là $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (1 điểm).

Câu 1.6 (2 điểm):

a) (1 điểm) Hệ $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi ma trận $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

khả nghịch, tức là $ad - bc \neq 0$.

b) (1 điểm) Ma trận của f theo cơ sở (ϵ_1, ϵ_2) là

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Câu 1.7 (2 điểm): Lấy $v \in (U \cap V_1) + (U \cap V_2)$, ta có $v = v_1 + v_2$, trong đó $v_1 \in U \cap V_1, v_2 \in U \cap V_2$. Suy ra $v = v_1 + v_2 \in U \cap (V_1 + V_2)$. (1 điểm).

Lấy ví dụ, chẳng hạn chọn $V = \mathbb{R}^2, V_1 = \langle (1; 0) \rangle, V_2 = \langle (0; 1) \rangle, U = \langle (1; 1) \rangle$ (1 điểm).

Câu 1.8 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh B là cơ sở của $\mathbb{R}_3[x]$.

Chứng minh B độc lập tuyến tính (0,5 điểm), $\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$ và B là hệ 4 vector độc lập tuyến tính nên B là cơ sở của $\mathbb{R}_3[x]$ (0,5 điểm).

b) (1 điểm) Tọa độ của $v = 2 + 3x - x^2 + 2x^3$ đối với cơ sở B là $(-4; 6; -3; 2)$.

Câu 1.9 (2 điểm): Hạng của hệ vector đã cho bằng hạng của ma trận tọa độ trong cơ sở $\{1, x, x^2, x^3\}$ (0,5 điểm). Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (1 điểm).}$$

Do $\text{rank} A = 3$ nên hạng của hệ vector đã cho bằng 3 (0,5 điểm).

Câu 1.10 (2 điểm):

Một cơ sở của $V_1 + V_2$ là $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\dim(V_1 + V_2) = 3$ (1 điểm).

Một cơ sở của $V_1 \cap V_2$ là $\{(1; 1; 0; 1)\}$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ (1 điểm).

KHỎI 2.

Câu 2.1 (2 điểm):

a) (1 điểm) $\forall X, Y \in M(2, \mathbb{R}), \forall a, b \in \mathbb{R}$,
 $f(aX + bY) = A(aX + bY) - (aX + bY)A = a(AX - XA) + b(AY - YA) = af(X) + bf(Y)$.

Do đó f là một ánh xạ tuyến tính.

b) Một cơ sở của $\text{Ker} f$ là $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ và $\dim(\text{Ker} f) = 2$ (0,5 điểm).

Một cơ sở của $\text{Im} f$ là $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ và $\dim(\text{Im} f) = 2$ (0,5 điểm).

Câu 2.2 (2 điểm):
$$\begin{cases} e_1 = u_4 \\ e_2 = u_3 - u_4 \\ e_3 = u_2 - u_3 \\ e_4 = u_1 - u_2 \end{cases} \text{ (0,5 điểm).}$$

Qua A , tính $f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4)$ theo e_1, e_2, e_3, e_4 , rồi bằng hệ trên theo u_1, u_2, u_3, u_4 (1 điểm). Ma trận của φ theo cơ sở $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ của V là:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -2 \\ -5 & -5 & -4 & -2 \\ 8 & 5 & 8 & 5 \\ -5 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ (0,5 điểm).}$$

Câu 2.3 (2 điểm): Với cơ sở chính tắc $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ của $\mathbb{R}^4$, tính $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$. Từ việc tìm $\text{rank}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$ cho ta một cơ sở của $\text{Im} f$ là $\{(1; 3; 4; 3), (0; -1; -3; 2)\}$ và $\dim(\text{Im} f) = 2$ (1 điểm).

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ta suy ra

$$\text{Ker } f = \{(8x_3 - 7x_4; -6x_3 + 5x_4; x_3; x_4) | x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Do đó một cơ sở của $\text{Ker } f$ là $\{(8; -6; 1; 0), (-7; 5; 0; 1)\}$ và $\dim \text{Ker}(f) = 2$ (1 điểm).

Câu 2.4 (2 điểm):

a) (1 điểm) Kiểm tra f là ánh xạ tuyến tính và là toàn ánh. Với $v \in V, w \in W$, $f(v, w) = 0 \Leftrightarrow v + w = 0$. Do đó

$$\text{Ker}(f) = \{(x; -x) | x \in U, -x \in V\} = \{(x; -x) | x \in U \cap V\}.$$

Ánh xạ $V \cap W \rightarrow \text{Ker}(f)$ biến x thành $(x; -x)$ rõ ràng là một đẳng cấu.

b) (1 điểm) Suy ra từ đẳng thức $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim V \times W$.

Câu 2.5 (2 điểm):

a) (1 điểm) Kiểm tra φ là một ánh xạ tuyến tính.

b) (1 điểm) $+\text{Im}\varphi = \{a_0 + a_1t | a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_1[t]$ có một cơ sở là $\{1, t\}$ và số chiều bằng 2.

$+\text{Ker}\varphi = \{a_2t^2 | a_2 \in \mathbb{R}\}$ có một cơ sở là $\{t^2\}$ và số chiều bằng 1.

Câu 2.6 (2 điểm):

a) (1 điểm) Kiểm tra f là một ánh xạ tuyến tính.

b) (1 điểm) Từ

$f(1) = 2 - 4x + 3x^2, f(x) = 3 + x + x^2 - x^3, f(x^2) = 6x + 6x^3 - 5x^4,$
 $f(x^3) = 9x^2 - x^3 + 11x^4 - 9x^5, f(x^4) = 12x^3 - 2x^4 + 16x^5 - 13x^6$, ta có ma trận cần tìm.

Câu 2.7 (2 điểm):

a) (1 điểm) Gọi B là ma trận của f theo cơ sở S . Ta có $B = C^{-1}AC$, trong đó

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (0.5 điểm)}.$$

$$\text{Vậy } B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ (0.5 điểm)}.$$

b) (1 điểm) Ta có $A = CBC^{-1}$. Suy ra

$$A^n = CB^nC^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-2)^n + 4^n & (-2)^n - 4^n & -(-2)^n + 4^n \\ -(-2)^n + 4^n & 3 \cdot (-2)^n - 4^n & -(-2)^n + 4^n \\ -(-2)^n + 2 \cdot 4^n & (-2)^n + 4^n & 2 \cdot (-2)^n - 2 \cdot 4^n \end{pmatrix}.$$

Câu 2.8 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

$\forall X = (x_1; x_2; x_3), Y = (y_1; y_2; y_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có

$f(\alpha X + \beta Y) = \dots = \alpha f(X) + \beta f(Y)$ nên f là ánh xạ tuyến tính.

b) (1 điểm) Tìm ma trận của f đối với cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$.

$$f(v_1) = (1; 1; -1) = 2v_2 - v_3,$$

$$f(v_2) = (2; 0; 0) = 2v_1,$$

$$f(v_3) = (1; 1; 1) = v_3 \quad (0, 5 \text{ điểm}).$$

Suy ra ma trận của f đối với cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$ là $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (0, 5 điểm).

Câu 2.9 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

$\forall X = (x_1; x_2; x_3), Y = (y_1; y_2; y_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có

$f(\alpha X + \beta Y) = \dots = \alpha f(X) + \beta f(Y)$ nên f là ánh xạ tuyến tính.

b) (1 điểm) Tìm một cơ sở và xác định số chiều của $\text{Im} f, \text{Ker} f$.

$\text{Im} f = \mathbb{R}^2 = \langle (1; 0), (0; 1) \rangle$, số chiều bằng 2 (0, 5 điểm)

$\text{Ker} f = \langle (0; 1; 1) \rangle$, số chiều bằng 1 (0, 5 điểm).

Câu 2.10 (2 điểm):

a) (1 điểm) Xác định ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$.

Gọi $S = \{e_1, e_2\}, T = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$. Ta có:

$f(e_1) = (1; 1; 1) = e'_1 + e'_2 + e'_3, f(e_2) = (1; -1; 2) = e'_1 - e'_2 + 2e'_3$ (0, 5 điểm).

Suy ra ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (0, 5 \text{ điểm}).$$

b) (1 điểm) Tìm một cơ sở của $\text{Im} f$ và $\text{Ker} f$.

$\text{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2) \rangle$, số chiều bằng 2 (0, 5 điểm), $\text{Ker} f = \{(0; 0; 0)\}$, số chiều bằng 0 (0, 5 điểm).

KHỎI 3.

Câu 3.1 (2 điểm): Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hệ này là hệ Cramer

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow (a - b)^{n-1} [a + (n - 1)b] \neq 0.$$

Câu 3.2 (2 điểm): Định thức của hệ $D = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$. (0.5 điểm)

$+ D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1, \lambda \neq -2$ thì hệ có duy nhất nghiệm $(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D}, \frac{D_{x_3}}{D})$

với $D_{x_1} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1), D_{x_2} = (\lambda - 1)^2, D_{x_3} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$. (0.5 điểm)

$+ \lambda = 1$ hệ vô số nghiệm với tập nghiệm là

$$\{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 1\}. \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$+ \lambda = -2$ hệ vô nghiệm. (0.5 điểm)

Câu 3.3 (2 điểm): Bằng các phép biến đổi sơ cấp dòng ta đưa ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

về ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. Do đó $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Câu 3.4 (2 điểm): Định thức của ma trận hệ số là $D = -26$ (0,5 điểm), các định thức lần lượt thay cột hệ số tự do là $D_x = -26$, $D_y = 52$, $D_z = 0$, $D_t = -26$ (1 điểm). Vậy nghiệm duy nhất của hệ đã cho là $(1; -2; 0; 1)$ (0,5 điểm).

Câu 3.5 (2 điểm): Bằng phương pháp khử Gauss, tức là sử dụng phép các biến đổi sơ cấp dòng trên ma trận hệ số mở rộng, ta có hệ phương trình vô nghiệm.

Câu 3.6 (2 điểm):

- $m = -3$: hệ phương trình vô nghiệm (0,5 điểm).
- $m = 1$: hệ phương trình có vô số nghiệm $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ (0,5 điểm).
- $m \neq -3$ và $m \neq 1$: hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(\frac{1}{m+3}; \frac{1}{m+3}; \frac{1}{m+3}; \frac{1}{m+3})$ (1 điểm).

Câu 3.7 (2 điểm): Ta có ma trận hệ số

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & 1 & 1 \\ 1 & 2-a & 1 \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix}, \det A = -(a-4)(a-1)^2 \text{ (0,5 điểm)}.$$

- $\det A \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 4$ và $a \neq 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(0; 0; 0)$ (0,5 điểm).
- Với $a = 4$ thì hệ có vô số nghiệm $(x_1; x_2; x_3)$ thỏa mãn $x_1 = x_2 = x_3$ (0,5 điểm).
- Với $a = 1$ thì hệ có vô số nghiệm $(x_1; x_2; x_3)$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (0,5 điểm).

Câu 3.8 (2 điểm): Ma trận hệ số mở rộng

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1 điểm).

Suy ra hệ có vô số nghiệm $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{6}x_5 \\ x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ (1 điểm)}.$$

Câu 3.9 (2 điểm): Ma trận hệ số mở rộng

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & -1 \\ 2 & 7 & 2\lambda + 1 & 2 \\ 3 & 9 & 4\lambda & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (1 điểm)}$$

Hệ có vô số nghiệm khi $\text{rank} A = \text{rank} \bar{A} < 3$. Suy ra với $\lambda = 1$ thì hệ vô số nghiệm (1 điểm).

Câu 3.10 (2 điểm): Ta có

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & a \\ a & -a^2 & a & 1 \\ a & 1 & -a^3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & a \\ 0 & 1 + a^2 & -2a^3 & 1 - a^2 \\ 0 & 0 & a(1 - a^2) & 1 - a^2 \end{pmatrix} \text{ (1 điểm)}$$

- Nếu $a \notin \{0, 1, -1\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(a; 1; \frac{1}{a})$.
- Nếu $a = 0$ thì hệ vô nghiệm (0, 5 điểm)
- Nếu $a = 1$ thì hệ vô số nghiệm $(x_1; x_2; x_3)$ thỏa mãn $x_1 = 1, x_2 = x_3$.
- Nếu $a = -1$ thì hệ vô số nghiệm $(x_1; x_2; x_3)$ thỏa mãn $x_1 = 1, x_2 = -x_3$ (0, 5 điểm).

KHỎI 4.

Câu 4.1 (2 điểm): Đa thức đặc trưng của A là $P_A(x) = -(x - 9)(x + 9)^2$. Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1 = 9$ (đơn) và $\lambda_2 = -9$ (kép) (0, 5 điểm).

Không gian con riêng $E(\lambda_1) = \langle (1; -4; 1) \rangle$ và $\dim(E(\lambda_1)) = 1$ (0, 5 điểm).

Không gian con riêng $E(\lambda_2) = \langle (4; 1; 0), (-1; 0; 1) \rangle$ và $\dim(E(\lambda_2)) = 2$ (0, 5 điểm).

Do đó A chéo hóa được.

$$\text{Đặt } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ta có } C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \text{ (0, 5 điểm)}.$$

Câu 4.2 (2 điểm): Đa thức đặc trưng của A là $P_A(x) = -(x - 2)(x - 4)(x - 9)$. Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ (đơn), $\lambda_2 = 4$ (đơn) và $\lambda_3 = 9$ (đơn) (0, 5 điểm).

Không gian con riêng $E(\lambda_1) = \langle (2; -5; 2) \rangle$ và $\dim(E(\lambda_1)) = 1$.

Không gian con riêng $E(\lambda_2) = \langle (-3; -3; 2) \rangle$ và $\dim(E(\lambda_2)) = 1$ (0, 5 điểm).

Không gian con riêng $E(\lambda_3) = \langle (1; 1; 1) \rangle$ và $\dim(E(\lambda_3)) = 1$ (0, 5 điểm).

Do đó A chéo hóa được.

$$\text{Đặt } C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ta có } C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ (0, 5 điểm)}.$$

Câu 4.3 (2 điểm): Đa thức đặc trưng của A là $P_A(x) = -(x - 8)(x - 2)^2$. Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1 = 8$ (đơn) và $\lambda_2 = 2$ (kép) (0, 5 điểm).

Không gian con riêng $E(\lambda_1) = \langle (1; 1; 2) \rangle$ và $\dim(E(\lambda_1)) = 1$ (0, 5 điểm).

Không gian con riêng $E(\lambda_2) = \langle (1; 1; 0), (0; 1; 1) \rangle$ và $\dim(E(\lambda_2)) = 2$ (0, 5 điểm).

Do đó A chéo hóa được.

Đặt $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ta có $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (0,5 điểm).

Câu 4.4 (2 điểm):

a) (1 điểm) Đa thức đặc trưng của A là $P_A(x) = -(x+3)(x-2)^2$. Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1 = -3$ (đơn) và $\lambda_2 = 2$ (kép).

Không gian con riêng $E(\lambda_1) = \langle (1; -1; 0) \rangle$ và $\dim(E(\lambda_1)) = 1$.

Không gian con riêng $E(\lambda_2) = \langle (1; 0; -2), (0; 1; 3) \rangle$ và $\dim(E(\lambda_2)) = 2$ (0,5 điểm).

Do đó A chéo hóa được.

Đặt $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, ta có $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (0,5 điểm).

b) (1 điểm) $\det(A^{2013}) = 2^{2013} \cdot 2^{2013} \cdot (-3)^{2013}$ (0,5 điểm)

$\text{trace}(A^{2013}) = 2^{2013} + 2^{2013} + (-3)^{2013}$ (0,5 điểm)

Câu 4.5 (2 điểm):

a) (1 điểm) Đa thức đặc trưng $P_f(\lambda) = -(\lambda+2)^2(\lambda-4)$. Như vậy, f có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = 4$ (đơn) và $\lambda_2 = -2$ (kép) (0,5 điểm).

Không gian con riêng $E(\lambda_1) = \langle u_1 = (1; 1; 2) \rangle$, $\dim(E(\lambda_1)) = 1$ và mọi $v \in E(\lambda_1) \setminus \{0\}$ đều là vectơ riêng của f ứng với giá trị riêng λ_1 .

Không gian con riêng $E(\lambda_2) = \langle u_2 = (1; 1; 0), u_3 = (0; 1; 1) \rangle$, $\dim(E(\lambda_2)) = 2$ và mọi $v \in E(\lambda_2) \setminus \{0\}$ đều là vectơ riêng của f ứng với giá trị riêng λ_2 (0,5 điểm).

b) f chéo hóa được, chọn $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ (0,5 điểm), ta có ma trận của f theo cơ sở này là ma trận chéo $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (0,5 điểm).

Câu 4.6 (2 điểm): Đa thức đặc trưng của A là $P_A(x) = -(x+4)(x-1)(x-2)$. Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1 = -4$ (đơn), $\lambda_2 = 1$ (đơn) và $\lambda_3 = 2$ (đơn) (0,5 điểm).

Không gian con riêng $E(\lambda_1) = \langle (1; 1; 1) \rangle$ và $\dim(E(\lambda_1)) = 1$.

Không gian con riêng $E(\lambda_2) = \langle (3; 3; -2) \rangle$ và $\dim(E(\lambda_2)) = 1$ (0,5 điểm).

Không gian con riêng $E(\lambda_3) = \langle (1; -2; 1) \rangle$ và $\dim(E(\lambda_3)) = 1$ (0,5 điểm).

Do đó A chéo hóa được.

Đặt $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, ta có $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (0,5 điểm).

Câu 4.7 (2 điểm): Đa thức đặc trưng của f là $P_f(x) = -x(x+1)(x-3)$. Do đó f có các giá trị riêng $\lambda_1 = 0$ (đơn), $\lambda_2 = -1$ (đơn), $\lambda_3 = 3$ (đơn) (0,5 điểm).

Không gian con riêng $E(0) = \langle v_1 = (5; 6; 4) \rangle$ và $\dim E(0) = 1$.

Không gian con riêng $E(-1) = \langle v_2 = (1; 2; 1) \rangle$ và $\dim E(-1) = 1$ (0,5 điểm).

Không gian con riêng $E(3) = \langle v_3 = (-1; 0; 1) \rangle$ và $\dim E(3) = 1$ (0,5 điểm).

f chéo hóa được, chọn $\{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, ma trận của f đối với cơ sở này là ma trận chéo $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (0, 5 điểm).

Câu 4.8 (2 điểm): Đa thức đặc trưng của f là $P_f(x) = -(x-4)(x-1)^2$. Do đó f có các giá trị riêng $\lambda_1 = 4$ (đơn), $\lambda_2 = 1$ (kép) (0, 5 điểm).

Không gian con riêng $E(4) = \langle v_1 = (1; 1; 1) \rangle$ và $\dim E(4) = 1$ (0, 5 điểm)

Không gian con riêng $E(1) = \langle v_2 = (-1; 0; 1), v_3 = (-1; 1; 0) \rangle$ và $\dim E(1) = 2$ (0, 5 điểm).

f chéo hóa được, chọn $\{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, ma trận của f đối với cơ sở này là ma trận chéo $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (0, 5 điểm).

Câu 4.9 (2 điểm): Đa thức đặc trưng của A là $P_A(x) = -(x+7)(x-7)^2$. Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1 = 7$ (kép), $\lambda_2 = -7$ (đơn) (0, 5 điểm).

Không gian con riêng $E(7) = \langle (-3; 0; 1), (-2; 1; 0) \rangle$ và $\dim E(7) = 2$ (0, 5 điểm).

Không gian con riêng $E(-7) = \langle (1; 2; 3) \rangle$ và $\dim E(-7) = 1$ (0, 5 điểm).

Do đó A chéo hóa được.

Đặt $C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, ta có $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ (0, 5 điểm).

Câu 4.10 (2 điểm): Ma trận của f đối với cơ sở $S = \{1, x, x^2\}$ của $\mathbb{R}_2[x]$ là $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Đa thức đặc trưng của f là $P_f(x) = P_A(x) = -(x+4)(x-3)^2$.

Do đó f có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = -4$ (đơn), $\lambda_2 = 3$ (kép) (1 điểm).

Không gian con riêng $E(-4) = \langle -6 + 8x + 3x^2 \rangle$ nên các vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -4$ là $E(-4) \setminus \{0\}$ (0, 5 điểm)

Không gian con riêng $E(3) = \langle 5 - 2x + x^2 \rangle$ nên các vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 3$ là $E(3) \setminus \{0\}$ (0, 5 điểm).

KHỎI 5.

Câu 5.1 (2 điểm):

Đặt $S(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) | A^t = A\}$ (A^t là ma trận chuyển vị của A) là tập hợp các ma trận vuông đối xứng cấp n hệ số thực.

Ta có $S(n) \neq \emptyset$ ($0 \in S(n)$) và $\alpha A + \beta B \in S(n)$ với mọi $A, B \in S(n)$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nên $S(n)$ là một không gian con của $M(n, \mathbb{R})$ (1 điểm).

Với $A = (a_{ij})_n \in S(n)$ ta có $A = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} E'_{ij}$ trong đó E'_{ij} là ma trận vuông cấp n có các phần tử nhận giá trị 1 tại hai vị trí là hàng i cột j và hàng j cột i còn các phần tử tại các vị trí khác đều bằng 0, $\{E'_{ij} | 1 \leq i \leq j \leq n\}$ độc lập tuyến tính

trong $S(n)$ nên đây là một cơ sở của $S(n)$ (0, 5 điểm) suy ra số chiều của $S(n)$ là $\frac{n^2 + n}{2}$ (0, 5 điểm).

Câu 5.2 (2 điểm): Ta luôn có

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \leq \dim V + \dim(V_1 \cap V_2).$$

Theo giả thiết $\dim V_1 + \dim V_2 > \dim V$ nên suy ra

$$\dim V_1 + \dim V_2 < \dim V_1 + \dim V_2 + \dim(V_1 \cap V_2) \quad (1 \text{ điểm}).$$

Vậy $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$ hay $V_1 \cap V_2$ chứa ít nhất một vector khác không (1 điểm)

Câu 5.3 (2 điểm): Theo giả thiết ta có

$$\dim(V_1 + V_2) - 1 = \dim(V_1 \cap V_2) \leq \dim V_1 \leq \dim(V_1 + V_2) \quad (1 \text{ điểm})$$

▪ Nếu $\dim V_1 = \dim(V_1 \cap V_2)$ thì $V_1 = V_1 \cap V_2$. Khi đó, $V_1 \subset V_2$ hay $V_1 + V_2 = V_2$ (0, 5 điểm).

▪ Nếu $\dim V_1 = \dim(V_1 + V_2)$ thì $V_1 = V_1 + V_2$. Khi đó, $V_2 \subset V_1$ hay $V_1 \cap V_2 = V_2$ (0, 5 điểm).

Câu 5.4 (2 điểm): Ta có

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}, (a+d)A = \begin{pmatrix} a^2 + ad & b(a+d) \\ c(a+d) & ad + d^2 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ điểm}).$$

Suy ra $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0 \in M(2; \mathbb{R})$ hay A thỏa mãn phương trình đã cho (1 điểm).

Câu 5.5 (2 điểm):

▪ Chứng minh $V = \text{Im}\varphi + \text{Ker}\varphi$ (1 điểm)

Ta có $\text{Im}\varphi + \text{Ker}\varphi \subset V$ (hiển nhiên) nên chỉ cần chứng minh $V \subset \text{Im}\varphi + \text{Ker}\varphi$.

Với $v \in V$ theo giả thiết ta có $\varphi^2(v) = \varphi(v)$ nên suy ra $\varphi(\varphi(v) - v) = 0$ hay $\varphi(v) - v = u \in \text{Ker}\varphi$ tức là $v = \varphi(v) + u \in \text{Im}\varphi + \text{Ker}\varphi$.

▪ Chứng minh $\text{Im}\varphi \cap \text{Ker}\varphi = \{0\}$ (1 điểm)

Giả sử $v_0 \in \text{Im}\varphi \cap \text{Ker}\varphi$ ta có $v_0 = \varphi(u)$ ($u \in V$) và $\varphi(v_0) = 0$. Do $\varphi^2 = \varphi$ nên suy ra $0 = \varphi(v_0) = \varphi^2(u) = \varphi(u) = v_0$. Vậy $\text{Im}\varphi \cap \text{Ker}\varphi = \{0\}$.

Câu 5.6 (2 điểm):

▪ Chứng minh Tr là một đồng cấu (1 điểm)

Với mọi $A = (a_{ij})_3, B = (b_{ij})_3 \in M(3; \mathbb{R})$, với mọi $\alpha, \beta \in R$ ta có $Tr(\alpha A + \beta B) = (\alpha a_{11} + \beta b_{11}) + (\alpha a_{22} + \beta b_{22}) + (\alpha a_{33} + \beta b_{33}) = \alpha Tr(A) + \beta Tr(B)$ nên Tr là một đồng cấu.

▪ Tìm một cơ sở cho hạt nhân của Tr (1 điểm)

$$\text{Ker}(Tr) = \{A \in M(3, \mathbb{R}) | Tr(A) = 0\} = \{A \in M(3, \mathbb{R}) | a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}.$$

$$\text{Suy ra một cơ sở cho hạt nhân của } Tr \text{ là } \{E_{ij(i \neq j)}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

trong đó E_{ij} là ma trận vuông cấp 3 có phần tử tại vị trí hàng i cột j bằng 1 và các phần tử còn lại bằng 0.

Câu 5.7 (2 điểm): Do 4 là giá trị riêng của A^2 nên ta có $\det(A^2 - 4I_n) = 0$. Vì A và $2I_n$ giao hoán với nhau nên $A^2 - 4I_n = A^2 - (2I_n)^2 = (A - 2I_n)(A + 2I_n)$ (1 điểm). Suy ra $\det(A^2 - 4I_n) = \det(A - 2I_n) \det(A + 2I_n) = 0$ do đó $\det(A - 2I_n) = 0$ hoặc $\det(A + 2I_n) = 0$. Vậy 2 hoặc -2 là giá trị riêng của A (1 điểm).

Câu 5.8 (2 điểm): Xét biểu diễn tuyến tính:

$$a_0x + a_1f(x) + \dots + a_{m-1}f^{m-1}(x) = 0 \quad (*) \text{ với } a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, m-1}.$$

Do $f^m(x) = 0, f^{m-1}(x) \neq 0$ nên $f^n(x) = 0$ với mọi số tự nhiên $n \geq m$ và $f^n(x) \neq 0$ với mọi số tự nhiên $n < m$ (1 điểm).

Tác động lần lượt $f^{m-1}, f^{m-2}, \dots, f$ lên $(*)$ ta lần lượt thu được $a_0 = 0, a_1 = 0, \dots, a_{m-1} = 0$. Vậy hệ vector đã cho độc lập tuyến tính (1 điểm).

Câu 5.9 (2 điểm):

Với λ là một số nguyên lẻ thì $A - \lambda I_n$ là ma trận có các phần tử trên đường chéo chính là các số nguyên lẻ và các phần tử còn lại là các số nguyên chẵn (0, 5 điểm).

Từ định nghĩa định thức ta có $\det(A - \lambda I_n)$ sẽ là tổng của một số nguyên lẻ và $(n! - 1)$ số nguyên chẵn (1 điểm)

Suy ra $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ hay A không thể có giá trị riêng là số nguyên lẻ (0, 5 điểm).

Câu 5.10 (2 điểm):

a) Chứng minh $f^{-1}(f(W)) = W + \text{Ker } f$ (1 điểm):

$$x \in f^{-1}(f(W)) \Leftrightarrow f(x) \in f(W) \Leftrightarrow \exists w \in W : f(x) = f(w)$$

$$\Leftrightarrow \exists w \in W : x - w = v \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \exists w \in W, \exists v \in \text{Ker } f : x = w + v$$

$$\Leftrightarrow x \in W + \text{Ker } f.$$

b) Chứng minh $f(f^{-1}(W')) = W' \cap \text{Im } f$ (1 điểm):

$$y \in W' \cap \text{Im } f \Leftrightarrow \exists x \in V : y = f(x) \in W'$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(W') : y = f(x) \Leftrightarrow y \in f(f^{-1}(W')).$$

DUYỆT
(Ký và ghi rõ họ tên)

CÁN BỘ RA ĐỀ
VÀ XÂY DỰNG ĐÁP ÁN

Trần Đình Long

Nguyễn Duy Ái Nhân

CÁN BỘ PHẢN BIỆN ĐỀ

Nguyễn Đặng Hồ Hải