Cho ánh xạ: $f: X \to Y$, nghĩa là, với mọi $x \in X$ tồn tại $y \in Y$ duy nhất sao cho $y = f(x)$.

Thí dụ: $X = Y = \mathbb{R}$ và $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = 2x$.

- f được gọi là đơn ánh nếu với mọi $x, x' \in X$ mà $x \neq x'$ thì $f(x) \neq f(x')$. Một cách tương đương

f được gọi là đơn ánh nếu với mọi $x, x' \in X$ mà $f(x) = f(x')$ thì $x = x'$.

- f được gọi là toàn ánh nếu với mọi $y \in Y$ tồn tại $x \in X$ để $y = f(x)$.
- f được gọi là song ánh từ X lên Y nếu nó vừa là đơn ánh và toàn ánh. Khi đó, tồn tại ánh xạ ngược
$$f^{-1}: Y \to X; \quad x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$
Thí dụ
$$y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}.$$

Cho $A \subset X$. Khi đó
$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

Cho $B \subset Y$. Khi đó
$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

Câu 2.1 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi:
$$f(x) = \frac{3x}{1 + x^2}.$$

Khảo sát các tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh của f.

Tìm $f^{-1}\left(\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]\right)$.

Giải: Xét phương trình
$$y = \frac{3x}{1 + x^2}.$$

Phương trình này tương đương với phương trình
$$yx^2 - 3x + y = 0.$$

Khi $y = 0$ thì có duy nhất $x = 0$.

Khi $y \neq 0$ ta có phương trình bậc hai với biệt số

$$\Delta = 9 - 4y^2.$$

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = 9 - 4y^2 \geq 0$ tức là khi $|y| \leq \frac{3}{2}$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$ tức là khi $|y| < \frac{3}{2}$. Do vậy, f không là toàn ánh và cũng không là đơn ánh.

Để tìm $f^{-1}\left(\left[-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right]\right)$ ta giải các bpt $-\frac{3}{4} \leq \frac{3x}{1+x^2} \leq \frac{3}{4}$ và đi đến:

$$f^{-1}\left(\left[-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right]\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -\frac{3}{4} \leq \frac{3x}{1+x^2} \leq \frac{3}{4}\right\}$$

$$\begin{cases} 1 + x^2 + 4x \geq 0 \\ 1 + x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} \\ x \leq \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ x \leq \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$= \left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{-2+\sqrt{2}}{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$$

Cách 2.

f không đơn ánh vì $f(3) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{10}$

f không toàn ánh vì $f(x) = 3$ vô nghiệm

$$f^{-1}\left(\left[-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right]\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -\frac{3}{4} \leq \frac{3x}{1+x^2} \leq \frac{3}{4}\right\}$$

$$= \left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{-2+\sqrt{2}}{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$$

Câu 2.2 (2 điểm): Cho hai ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ và $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi

$$f(x) = 2x, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \text{ nếu } x \text{ là chẵn} \\ \dfrac{x-1}{2} \text{ nếu } x \text{ là lẻ} \end{cases}.$$

Khảo sát các tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh của f và g.

Giải: Ta có

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y$$

nên f đơn ánh.

$f^{-1}(1) = \emptyset$ nên f không toàn ánh.

Với mọi $k \in \mathbb{N}$ ta có $g(2k) = k$ nên g toàn ánh. Do $g(2k) = k = g(2k+1)$ vậy g không đơn ánh.

Câu 2.3 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi:

$$f(n) = \left[\frac{n}{2}\right]$$

(với kí hiệu $[x]$ để chỉ số nguyên lớn nhất không vượt quá x, gọi là phần nguyên của x). Khảo sát các tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh của f. Tìm $f^{-1}(\{0; 1; 2\})$.

Giải: Ta có, với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $f(2n) = \left[\frac{2n}{2}\right] = [n] = n$ nên f là toàn ánh. Do $f(2n) = n = f(2n+1)$ nên f không đơn ánh.

$$f^{-1}(\{0; 1; 2\}) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

$$\left[\frac{x}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow 0 \le \frac{x}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 \le x < 2$$

Do $x \in \mathbb{N}$ nên $x = 0; 1$.

$$\left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{2} < 2 \Leftrightarrow 2 \le x < 4$$

Do $x \in \mathbb{N}$ nên $x = 2; 3$.

…

Câu 2.4 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi:

$$f(n) = n(n+1)$$

Khảo sát các tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh của f.

Tìm $f^{-1}(2)$.

Giải: Ta có

Với $m, n \in \mathbb{N}$, $f(m) = f(n) \Leftrightarrow m(m+1) = n(n+1)$

$$\Leftrightarrow (m-n)(m+n+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} m = n \\ m+n+1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = n$$

Vậy f là đơn ánh.

Phương trình $f(n) = 1 \Leftrightarrow n^2 + n - 1 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{N}$

Tức là $f^{-1}(1) = \emptyset$ nên f không toàn ánh.

$$f(n) = 2 \Leftrightarrow n^2 + n - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = -2(\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy $f^{-1}(2) = \{1\}$.

Câu 2.5 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ xác định bởi:

$$f(x, y) = (x + y, 2x - y + 1).$$

Chứng tỏ rằng f là một đơn ánh, f có phải là một song ánh không?

Giải: Giả sử với $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mà $f(x, y) = f(x', y')$

khi đó

$$\begin{cases} x + y = x' + y' \\ 2x - y + 1 = 2x' - y' + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x' + y' \\ 2x - y = 2x' - y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

nên f là đơn ánh.

Ta có $f(x, y) = (0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

Do $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nên f không toàn ánh.

Vậy f không song ánh.

Câu 2.6 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ xác định bởi:

$f(n) = \frac{n}{2}$ nếu n chẵn và $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ nếu n lẻ.

a) (1 điểm) Chứng minh rằng f là một song ánh.

b) (1 điểm) Tìm ánh xạ ngược của ánh xạ f.

Giải:

a) Giả sử $f(m) = f(n)$.

Nếu $f(n) \geq 0$ thì $f(n) = \frac{n}{2}$ và $f(m) = \frac{m}{2}$ $(n, m$ chẵn). Do đó $f(m) = f(n) \Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{n}{2} \Leftrightarrow m = n$.

Nếu $f(n) < 0$ thì $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ và $f(m) = -\frac{m+1}{2}$ $(n, m$ lẻ). Do đó $f(m) = f(n) \Leftrightarrow -\frac{m+1}{2} = -\frac{n+1}{2} \Leftrightarrow m = n$.

Vậy f là đơn ánh.

Với mọi $m \in \mathbb{Z}$,

Nếu $m \in \mathbb{N}$ thì ta có $f(2m) = m$.

Còn $m < 0$, do

$$-\frac{n+1}{2} = m \Leftrightarrow n = -2m - 1 \in \mathbb{N}$$

nên

$$f(-2m-1) = -\frac{-2m-1+1}{2} = m$$

Vậy f toàn ánh. Tóm lại f là một song ánh.

Do $f(2m) = m$ nếu $m \geq 0$ và $f(-2m-1) = m$ nếu $m < 0$, nên

$$f^{-1}: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$

$$f^{-1}(m) = \begin{cases} 2m, & \text{nếu } m \geq 0 \\ -2m-1, & \text{nếu } m < 0 \end{cases}.$$

Câu 2.7 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ xác định bởi:

$$f(m, n) = 2^m . 5^n.$$

Hỏi ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh, song ánh không?

Giải: Ta có

$$f(m, n) = f(m', n') \Leftrightarrow 2^m . 5^n = 2^{m'} . 5^{n'}$$

Do cách phân tích một số nguyên thành các thừa số nguyên tố là duy nhất nên $n = n'$ và $m = m'$, tức là $(m, n) = (m', n')$ Vậy f là đơn ánh.

Do số nguyên dương 3 không phân tích dưới dạng $2^m . 5^n$ nên f không toàn ánh. Vậy f cũng không song ánh.

Câu 2.8 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: X \to Y$.

a) (1 điểm) Chứng minh với mọi $A \subset X, B \subset X$ luôn có

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

b) (1 điểm) Tìm một ánh xạ f mà

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

Giải:

a) Do $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ nên $f(A \cap B) \subset f(A)$ và $f(A \cap B) \subset f(B)$. Vậy $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

b) Đặt $X = \{a; b\}$ và $Y = \{1\}$. Ánh xạ $f: X \to Y$ xác định bởi

$$f(a) = f(b) = 1.$$

Lại đặt $A = \{a\}, B = \{b\}$. Như vậy $A \cap B = \emptyset$ nên

$$\emptyset = f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) = \{1\}.$$

Câu 2.9 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = x^2 + 4x - 1.$$

a) (1 điểm) Hỏi f có là đơn ánh, toàn ánh không?

b) (1 điểm) Xác định $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}); f^{-1}([4; 11])$.

Giải:

a) Do $f(-4) = f(0) = -1$ nên f không đơn ánh.
Do $f(x) = x^2 + 4x - 1 = (x+2)^2 - 5 \geq -5$ nên f không toàn ánh.

b) $\operatorname{Im} f = \{(x+2)^2 - 5 | x \in \mathbb{R}\} = [-5; \infty)$

$$\begin{aligned} f^{-1}([4; 11]) &= \{x \in \mathbb{R} |\ 4 \leq x^2 + 4x - 1 \leq 11\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 4x - 5 \geq 0 \wedge x^2 + 4x - 12 \leq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left[\begin{matrix} x \leq -5 \\ x \geq 1 \end{matrix}\right. \wedge -6 \leq x \leq 2\right\} = [-6; -5] \cup [1; 2]. \end{aligned}$$

Câu 2.10 (14/12) (2 điểm**)**: Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{nếu } x \leq 0 \\ 3x + 1, & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

a) (1 điểm) Chứng minh f là một song ánh.

b) (1 điểm) Tìm ánh xạ ngược của ánh xạ f.

Giải:

a) Giả sử $f(x) = f(y)$.

Nếu $f(x) = f(y) \leq 1$ thì $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x + 1 = y + 1 \Leftrightarrow x = y$.

Nếu $f(x) = f(y) > 1$ thì $f(x) = f(y) \Leftrightarrow 3x + 1 = 3y + 1 \Leftrightarrow x = y$.

Do vậy, f đơn ánh.

Với $y \in \mathbb{R}$.

Nếu $y \leq 1$ thì $f(y-1) = y - 1 + 1 = y$.

Nếu $y > 1$ thì $f\left(\frac{y-1}{3}\right) = 3\,\frac{y-1}{3} + 1 = y$.

Nên f là toàn ánh.

Vậy f là một song ánh.

b) Theo trên ta có

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y - 1, \text{nếu } y \leq 1 \\ \dfrac{y-1}{3}, \text{nếu } y > 1 \end{cases}.$$

Câu 2.11 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Xác định $f\big((-1;4]\big)$ và $f^{-1}\big([-2;\ 18)\big)$.

Giải:

Lập bảng biến thiên ta có $f\big((-1;4]\big) = [-2;18]$

Ta có

$$x \in f^{-1}\big([-2;18)\big) \Leftrightarrow f(x) \in [-2;18)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -2 \\ f(x) < 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0 \\ x^3 - 3x^2 - 16 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;4)$$

Vậy $f^{-1}\big([-2;18)\big) = [-1;4)$

Câu 2.12 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

a) (1 điểm) Hỏi ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không?

b) (1 điểm) Tìm một tập $A \subset \mathbb{R}$ sao cho f là một song ánh từ A vào $\mathbb{R}$.

Giải:

a) Lập bảng biến thiên ta có $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ nên f là một toàn ánh.

Vì $f(-1) = f(2) = 3$ nên f không là đơn ánh.

b) Chọn $A = (-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$ ta có f là một song ánh từ A vào $\mathbb{R}$.

Câu 2.13 (2 điểm) Cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ xác định bởi

$$f(m; n) = (m + n; 2m + n)$$

Hỏi f có phải là đơn ánh, toàn ánh không?

Giải:

Giả sử

$$f(m, n) = f(m', n')$$

$$\Rightarrow (m + n; 2m + n) = (m' + n'; 2m' + n')$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n = m' + n' \\ 2m + n = 2m' + n' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = m' \\ n = n' \end{cases} \Rightarrow (m, n) = (m', n').$$

Vậy f là một đơn ánh.

Xét phương trình $f(m, n) = (1; 0)$ khi đó

$$\begin{cases} m + n = 1 \\ m + 2n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}$$

Do $(2; -1) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nên f không là một toàn ánh.

Câu 2.14 (2 điểm): Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$f(x; y) = (x - y; x + y).$$

a) (1 điểm) Chứng minh ánh xạ f là một song ánh.

b) (1 điểm) Tìm ánh xạ ngược của ánh xạ f.

Giải:

a) Với mọi $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, ta có

$$f(x; y) = (a; b) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a + b}{2} \\ y = \dfrac{b - a}{2} \end{cases}$$

Do đó f là một song ánh và

$$f^{-1}(a;b) = \left(\frac{a+b}{2};\frac{b-a}{2}\right).$$

Câu 2.15 (2 điểm) Cho ánh xạ $f: X \to Y$

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi tập $A \subset X$ luôn có.

$$A \subset f^{-1}\big(f(A)\big).$$

b) (1 điểm) Tìm một ánh xạ f mà $A \neq f^{-1}\big(f(A)\big)$.

Giải:

a) $\forall x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$.

b) Thí dụ $f: \{a;b\} \to \{1\}$ với $f(a) = f(b) = 1$.

Đặt $A = \{a\}$ thì

$$f^{-1}\big(f(A)\big) = f^{-1}\big(f(a)\big) = f^{-1}(1) = \{a;b\} \neq A.$$

Câu 2.16 (2 điểm) Cho ánh xạ $f: X \to Y$

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi tập $B \subset Y$ luôn có.

$$f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B.$$

b) (1 điểm) Tìm một ánh xạ f mà $f\big(f^{-1}(B)\big) \neq B$.

Giải:

a) $\forall y \in f\big(f^{-1}(B)\big) \Rightarrow f^{-1}(y) \in f^{-1}(B) \Rightarrow y \in B$

nên $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.

b) Thí dụ $f: \{a\} \to \{1;2\}; f(a) = 1$. Đặt $B = \{1;2\}$. Khi đó

$$f\big(f^{-1}(B)\big) = f(\{a\}) = f(a) = \{1\} \subsetneq B.$$

Câu 2.17 (2 điểm) Cho ánh xạ $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ xác định bởi

$$f(m;n) = (2m+3n; 3m+5n)$$

Chứng minh f là một song ánh. Tìm f^{-1}.

Giải:

Ta có $f(m,n) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3n = a \\ 3m+5n = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5a-3b \\ n = -3a+2b \end{cases}$

Do đó f là một song ánh.

$$f^{-1}(a,b) = (5a-3b, -3a+2b)$$

Câu 2.18 (2 điểm): Cho $m \in \mathbb{N}^*$ và cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi: $f(n) = \begin{cases} m-n, nếu\ n \le m \\ m+n, nếu\ n > m. \end{cases}$

a) (1 điểm) Hỏi ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không?

b) (1 điểm) Tìm một tập $B \subset \mathbb{N}$ sao cho f là song ánh từ $\mathbb{N}$ vào B.

Giải:

a) Ta có $f(n) \le m$ khi $n \le m$ và $f(n) > 2m$ khi $n > m$.

● Do đó $f(n) \notin A = \{m+1; m+2; \dots; 2m\}$
nên f không là toàn ánh.
Nếu $f(n) = f(k) \le m$ thì khi đó

$$\begin{cases} f(n) = m - n \\ f(k) = m - k \end{cases}$$

Nên $f(n) = f(k) \Rightarrow m - n = m - k \Rightarrow n = k$.
Nếu $f(n) = f(k) > m$ thì $f(n) = f(k) \Rightarrow m + n = m + k \Rightarrow n = k$.
Vậy f là một đơn ánh.

b) Xét $B = \mathbb{N} \setminus A$, ta có f là một song ánh từ $\mathbb{N}$ vào B.

Câu 2.19 (2 điểm) Cho ánh xạ $f: (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, \text{nếu } 0 < x < 1 \\ (x-1)^2, \text{nếu } x \ge 1 \end{cases}$$

a) (1 điểm) Chứng minh f là một song ánh.

b) (1 điểm) Xác định ánh xạ ngược của ánh xạ f.

Giải:

a) Lập bảng biến thiên ta có f là một song ánh.

Cách 2: Ta có

$$f(0;1) = (-\infty; 0); f\big([1; +\infty)\big) = ([0; +\infty)$$

Nên f toàn ánh.

Mặt khác, giả sử $f(x) = f(x')$.

Nếu $f(x) = f(x') < 0$ thì $x, x' \in (0;1)$ nên $\ln x = \ln x' \Leftrightarrow x = x'$.

Nếu $f(x) = f(x') \geq 0$ thì $x, x' \in [1; +\infty)$ nên $(x-1)^2 = (x'-1)^2 \Leftrightarrow x = x'$.

Vậy f là một song ánh.

b) Với mọi $y \in \mathbb{R}$.

Nếu $y < 0$ ta có $\ln e^y = y$ nên $f^{-1}(y) = e^y$

Nếu $y \geq 0$ ta có $(x-1)^2 = y \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{y}$. Vậy $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y}$. Tóm lại

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} e^y, & \text{nếu } y < 0 \\ 1 + \sqrt{y}, & \text{nếu } y \geq 0 \end{cases}$$

Câu 2.20 (2 điểm) Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1, x \leq 0 \\ 3x+1, x > 0. \end{cases}$$

a) (1 điểm) Hỏi f có là đơn ánh, toàn ánh không?.

b) (1 điểm) Xác định $f([-1;4])$, $f^{-1}([1;13])$.

Giải:

a) Vì có $f(x) \geq 1, \forall x \in \square$ nên f không là toàn ánh.

Ta có $f(-3) = f(2) = 7$ nên f không là đơn ánh.

b) $f([-1;4]) = [1;13]$ $\quad f^{-1}([1;13]) = [-6;4]$

2.1 Quan hệ hai ngôi và các tính chất

Định nghĩa 2.1.1. *Quan hệ hai ngôi* (gọn hơn là quan hệ) trong tập hợp E là một tập con $\mathcal{R}$ của tập hợp tích $E \times E$. Nếu $(x, y) \in \mathcal{R}$ thì ta nói x có quan hệ $\mathcal{R}$ với y và viết $x\mathcal{R}y$, ngược lại ta nói x không quan hệ $\mathcal{R}$ với y và viết $x\overline{\mathcal{R}}y$.

Quan hệ $\mathcal{R}$ có thể có những tính chất sau đây.

- $\mathcal{R}$ có tính *phản xạ* nếu với mọi $x \in E$ ta luôn có $x\mathcal{R}x$. Điều này tương đương với đường chéo $\Delta = \{(x, x) \in E \times E / x \in E\}$ chứa trong $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ có tính *đối xứng* nếu $x\mathcal{R}y$ thì ta luôn có $y\mathcal{R}x$. Nói cách khác, $\mathcal{R}$ có tính đối xứng nếu cặp thứ tự (x, y) tùy ý thuộc $\mathcal{R}$ thì cặp đối xứng qua đường chéo là (y, x) cũng thuộc $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ có tính *phản đối xứng* nếu $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}x$ thì ta luôn có $x = y$. Điều này có nghĩa là nếu cặp thứ tự $(x, y) \in \mathcal{R}$ mà $x \neq y$ thì cặp $(y, x) \notin \mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ có tính *bắc cầu* nếu $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}z$ thì ta luôn có $x\mathcal{R}z$.

2.2 Quan hệ tương đương

Định nghĩa 2.2.1. Quan hệ trong tập hợp E có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu gọi là một quan hệ *tương đương*.

Xét quan hệ tương đương $\sim$ trong E. Cho $x \in E$ ta ký hiệu

$$\overline{x} = \{y \in E \mid y \sim x\},$$

gọi là *lớp tương đương* của x. Phần tử $y \in \overline{x}$ gọi là một đại diện của lớp tương đương $\overline{x}$.

Mệnh đề 2.2.2. *Cho $\sim$ là quan hệ tương đương trong tập hợp E. Khi đó ta có:*

i) Mỗi lớp tương đương là một tập hợp khác rỗng;

ii) Hai lớp tương đương hoặc có giao bằng rỗng hoặc bằng nhau. Nếu hai lớp tương đương có hai phần tử đại diện nào đó tương đương thì bằng nhau;

iii) E là hợp của tất cả các lớp tương đương.

Tập thương: Tập E chia thương cho quan hệ tương đương $\sim$ trên E là tập gồm tất cả các lớp tương đương $\overline{x}$ với mọi $x \in E$. Kí hiệu:

$$E/_{\sim} = \{\overline{x} : x \in E\}$$

2.3 Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 2.3.2. Cho tập hợp E có thứ tự $\preceq$ và $A \subset E$.

i) Phần tử $a \in A$ gọi là *cực đại* trong A nếu $\forall x \in A$ mà $a \preceq x$ thì $x = a$, tức là trong các phần tử của A mà so sánh được với a thì không có phần tử nào lớn hơn a.

ii) Phần tử $b \in A$ gọi là *cực tiểu* trong A nếu $\forall x \in A$ mà $x \preceq b$ thì $x = b$, nghĩa là trong các phần tử của A nếu so sánh được với b thì không có phần tử nào nhỏ hơn b.

Chú ý: phần tử cực đại còn được gọi là phần tử tối đại, phần tử cực tiểu còn được gọi là phần tử tối tiểu.

iii) Phần tử $a \in A$ gọi là *lớn nhất* trong A nếu $x \preceq a$ với mọi $x \in A$, điều này có nghĩa là mọi phần tử trong A đều so sánh được với a và không có phần tử nào lớn hơn a.

iv) Phần tử $b \in A$ gọi là *nhỏ nhất* trong A nếu $b \preceq x$ với mọi $x \in A$, tức là mọi phần tử trong A đều so sánh được với b và không có phần tử nào nhỏ hơn b.

Định nghĩa 2.3.3. Cho tập hợp E có thứ tự $\preceq$ và $A \subset E$.

i) Phần tử $a \in E$ gọi là một *chặn trên* của A nếu $x \preceq a$ với mọi $x \in A$. Phần tử nhỏ nhất trong tập hợp các chặn trên của A nếu có gọi là *supremum* của A ký hiệu $\sup A$.

ii) Phần tử $b \in E$ gọi là một *chặn dưới* của A nếu $b \preceq x$ với mọi $x \in A$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp các chặn dưới của A nếu có gọi là *infimum* của A ký hiệu $\inf A$.

Nhận xét rằng nếu a là phần tử lớn nhất (t.ư. nhỏ nhất) trong A thì $a = \sup A$ (t.ư. $a = \inf A$).

Câu 3.1 (2 điểm): Trên $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots; n; n+1; \dots\}$, xét quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ như sau:

$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots; n; n+1; \dots\}, b = a2^n$.

a) $\mathcal{R}$ có phải là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$ không?

b) Nếu $\mathcal{R}$ là quan hệ thứ tự, hãy tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất của tập hợp $\{2,3,4,6,8,10,12\}$

Giải:

a) $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự

Phản xạ: $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a = 2^0 a$ nên $a\mathcal{R}a$.

Phản đối xứng: $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$ mà $a\mathcal{R}b$ và $b\mathcal{R}a$ thì tồn tại $n, m \in \mathbb{N}$ để

$b = 2^n a$ và $a = 2^m b$ nên $b = 2^{n+m} b$ suy ra $n + m = 0$ nên $m = n = 0$. Vậy $a = b$.
Bắc cầu: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$ mà $a\mathcal{R}b$ và $b\mathcal{R}c$ thì tồn tại $n, m \in \mathbb{N}$ để $b = 2^n a$ và $c = 2^m b$ nên $c = 2^{n+m} a$, suy ra $a\mathcal{R}c$.
b) Ta có

$$\{2,3,4,6,8,10,12\}$$

$2\mathcal{R}4$, $4\mathcal{R}8$; $3\mathcal{R}6$, $6\mathcal{R}12$; $10\mathcal{R}10$

Phần tử tối đại: 8,12,10
Phần tử tối tiểu: 2,3,10
Phần tử lớn nhất: không có
Phần tử nhỏ nhất: không có

Câu 3.2 (2 điểm): Xét quan hệ $\sim$ trên tập $\mathbb{N}^*$ các số nguyên dương:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, a \sim b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, b = a2^n.$$

Chứng minh rằng $\sim$ là một quan hệ tương đương. Trong số các lớp tương đương $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}$ có bao nhiêu lớp đôi một phân biệt.

Giải:

$\sim$ là quan hệ tương đương

Phản xạ: $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a = 2^0 a$ nên $a \sim a$.
Đối xứng: $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$ mà $a \sim b$ thì tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ để $b = 2^n a$ suy ra $a = 2^{-n} b$ nên $b \sim a$.
Bắc cầu: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$ mà $a \sim b$ và $b \sim c$ thì tồn tại $n, m \in \mathbb{Z}$ để $b = 2^n a$ và $c = 2^m b$ nên $c = 2^{n+m} a$, suy ra $a \sim c$.

Có hai lớp tương đương phân biệt $\overline{1} = \overline{2} = \overline{4} \neq \overline{3} = \overline{6}$.

Câu 3.3 (2 điểm): Trên tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực, xét quan hệ $\mathcal{R}$ như sau:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\, \mathcal{R}\, y \Leftrightarrow (x^3 + 2)(y^2 + 1) = (y^3 + 2)(x^2 + 1).$$

Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương và xác định các lớp tương đương $\overline{1}, \overline{2}$.

Giải:

$\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương

Phản xạ: $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $(x^3+2)(x^2+1) = (x^3+2)(x^2+1)$ nên $x\mathcal{R}x$.

Đối xứng: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mà $x\,\mathcal{R}\,y$ thì ta có $(x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)$. Khi đó $(y^3+2)(x^2+1) = (x^3+2)(y^2+1)$ nên $y\mathcal{R}x$.

Bắc cầu: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ mà $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}z$ thì $(x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)$ và $(y^3+2)(z^2+1) = (z^3+2)(y^2+1)$ nên

$$(x^3+2)(y^2+1)(y^3+2)(z^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)(z^3+2)(y^2+1)$$
$$\Leftrightarrow (x^3+2)(z^2+1) = (z^3+2)(x^2+1).$$

Vậy $x\mathcal{R}z$.

Ta có

$$x\mathcal{R}1 \Leftrightarrow (x^3+2)(1^2+1) = (1^3+2)(x^2+1)$$
$$\Leftrightarrow 2x^3+4 = 3x^2+3 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 1 \\ x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}\right.$$

Vậy

$$\overline{1} = \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$$

Tương tự

$$x\mathcal{R}2 \Leftrightarrow (x^3+2)(2^2+1) = (2^3+2)(x^2+1)$$
$$\Leftrightarrow 5x^3+10 = 10x^2+10 \Leftrightarrow 5x^3-10x^2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 2. \end{aligned}\right.$$

Nên

$$\overline{2} = \{2; 0\}$$

Câu 3.4 (2 điểm): Ký hiệu $X = \{m + n\sqrt{5} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Trên X xét quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ như sau:

$(m+n\sqrt{5})\mathcal{R}(m' + n'\sqrt{5}) \Leftrightarrow m - m'$ và $n - n'$ đều là bội số của 2.

Chứng tỏ $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương và tìm các lớp tương đương.

Giải:

<u>R là quan hệ tương đương</u>

Phản xạ: Ta có $\left(m+n\sqrt{5}\right)\mathcal{R}\left(m+n\sqrt{5}\right)$ vì $m-m=n-n=0 \vdots 2$.

Đối xứng: $\left(m+n\sqrt{5}\right)\mathcal{R}\left(m'+n'\sqrt{5}\right) \Rightarrow m-m'=2k, n-n'=2\ell$

$\Rightarrow m'-m=-2k, n'-n=-2\ell$ nên $\left(m'+n'\sqrt{5}\right)\mathcal{R}\left(m+n\sqrt{5}\right)$

Bắc cầu: $\left(m+n\sqrt{5}\right)\mathcal{R}\left(m'+n'\sqrt{5}\right); \left(m'+n'\sqrt{5}\right)\mathcal{R}\left(m''+n''\sqrt{5}\right)$

$$\Rightarrow m-m'=2k, n-n'=2\ell; m'-m''=2k', n'-n''=2\ell'$$

$$\Rightarrow m-m''=2(k+k'), n-n''=2(\ell+\ell')$$

$$\Rightarrow \left(m+n\sqrt{5}\right)\mathcal{R}\left(m''+n''\sqrt{5}\right)$$

Các lớp tương đương theo quan hệ $\mathcal{R}$:
Do $0=0+0\sqrt{5}$ nên $\overline{0}=\{m+n\sqrt{5}|m$ chẵn và n chẵn$\}$
Do $1=1+0\sqrt{5}$ nên $\overline{1}=\{m+n\sqrt{5}|m$ lẻ và n chẵn$\}$
Do $\sqrt{5}=0+1\sqrt{5}$ nên $\overline{\sqrt{5}}=\{m+n\sqrt{5}|m$ chẵn và n lẻ$\}$
Do $1+\sqrt{5}=1+1\sqrt{5}$ nên $\overline{1+\sqrt{5}}=\{m+n\sqrt{5}|m$ lẻ và n lẻ$\}$

Câu 3.5 (2 điểm): Xét tập hợp $\mathcal{P}(X)$ (tập tất cả các tập con của X) được sắp thứ tự bởi quan hệ bao hàm "$\subset$", trong đó $X=\{1,2,3,4,5,6\}$. Hãy xác định các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất, cận trên, cận dưới của các tập $A=\mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$ và $B=\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4,5\}\}$.
Giải:
Tập $A=\mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$:
Phần tử tối đại: X
Phần tử tối tiểu: các tập con của X gồm 1 phần tử
Phần tử lớn nhất: X
Phần tử nhỏ nhất: không có
Phần tử cận trên: X ($\sup A=X$)
Phần tử cận dưới: $\emptyset$ ($\inf A=\emptyset$)

Tập $B=\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4,5\}$
Phần tử tối đại: $\{1,2,3,4,5\}$
Phần tử tối tiểu: $\{1,2\},\{2,3,4\}$
Phần tử lớn nhất: $\{1,2,3,4,5\}$
Phần tử nhỏ nhất: không có
Phần tử cận trên: $\sup B=\{1,2,3,4,5\}$.

Phần tử cận dưới: $\inf B = \{2\}$.

Câu 3.6 (2 điểm): Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}^*$ xác định bởi:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*. m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m|n.$$

a) (1 điểm) Chứng minh $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.

b) (1 điểm) Xác định phần tử tối đại, phần tử tối tiểu, sup, inf của tập hợp $X = \{2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15\}$.

Giải:
a) Với mọi $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ ta có

Phản xạ: $m \in \mathbb{N}^*, m|m$ nên $m\mathcal{R}m$.
Phản xứng $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} m\mathcal{R}n \\ n\mathcal{R}m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m|n \\ n|m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = km \\ m = \ell n \end{cases}, k, \ell \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = k\ell n \Rightarrow k\ell = 1$$
$$\Rightarrow k = \ell = 1 \Rightarrow m = n.$$

Bắc cầu: $m, n, p \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} m\mathcal{R}n \\ n\mathcal{R}p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m|n \\ n|p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = km \\ p = \ell n \end{cases}, k, \ell \in \mathbb{N}^* \Rightarrow p = k\ell m \Rightarrow m|p \Rightarrow m\mathcal{R}p.$$

Vậy $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$
Phần tử tối đại của $X = \{2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15\}$:

$$7, 8, 9, 10, 12, 15.$$

Phần tử tối tiểu của X: $2, 5, 7, 9$
Tập các chặn trên của X: $\{2^3.3^2.5^1.7^1.k | k \in \mathbb{N}^*\}$ nên $\sup X = 2520$.

Chặn dưới của X: 1 nên $\inf X = 1$.

Câu 3.7 (2 điểm): Ký hiệu $\mathcal{P}(X)$ là tập các tập con của tập: $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. $\prec$ là một quan hệ hai ngôi trên $\mathcal{P}(X)$ xác định bởi:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A \prec B \Leftrightarrow A \supset B.$$

a) (1 điểm) Chứng minh $\prec$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathcal{P}(X)$.
b) (1 điểm) Xác định phần tử tối đại, tối tiểu, sup, inf của tập hợp

$$Y = \{\{0\}, \{0; 1; 2\}; \{0; 1; 3\}, \{1; 2; 3\}, \{2; 3; 4\}\{1; 2; 3; 5\}\}$$

Giải**:**

a) Bài tập.

$$A \supset A$$
$$A \supset B, B \supset A \Rightarrow A = B.$$
$$A \supset B, B \supset C \Rightarrow A \supset C$$

b) Phần tử tối đại của Y: $\{0\}; \{1; 2; 3\}; \{2; 3; 4\}$.

Phần tử tối tiểu của Y: $\{0; 1; 2\}; \{0; 1; 3\}; \{2; 3; 4\}; \{1; 2; 3; 5\}$.

$$\sup Y = \emptyset, \inf Y = X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Câu 3.8 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{R}^2$ xác định bởi: $\forall (a; b), (c; d) \in \mathbb{R}^2, (a; b)S(c; d) \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq c \\ b \leq d \end{cases}$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ thứ tự trên trên $\mathbb{R}^2$.

b) (1 điểm) Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, sup, inf của tập $A = (0; 1] \times [0; 1]$.

Giải:

a) $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} a \leq a \\ b \leq b \end{cases} \Rightarrow (a; b)S(a; b)$.

$$\forall (a; b), (c; d) \in \mathbb{R}^2: \begin{cases} (a; b)S(c; d) \\ (c; d)S(a; b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq c \\ b \leq d \\ c \leq a \\ d \leq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a; b) = (c; d).$$

$$\forall (a; b), (c; d), (e; f) \in \mathbb{R}^2: \begin{cases} (a; b)S(c; d) \\ (c; d)S(e; f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq c \leq e \\ b \leq d \leq f \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a; b)S(e; f).$$

Do đó S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}^2$.

b) Giả sử $(a; b)S(x; y)$. Khi đó $\begin{cases} a \leq x, \forall a \in (0; 1] \\ b \leq y, \forall b \in [0; 1] \end{cases}$ nên $\begin{cases} 1 \leq x \\ 1 \leq y \end{cases}$ nên $(1; 1)$ là phần tử lớn nhất và cũng là phần tử tối đại của tập A; hơn nữa $\sup A = (1; 1)$

Giả sử $(x; y)S(a; b)$. Khi đó $\begin{cases} x \leq a, \forall a \in (0; 1] \\ y \leq b, \forall b \in [0; 1] \end{cases}$ nên $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ nên $\inf A = (0; 0)$ Do $(0; 0) \notin A$ nên A không có phần tử tối tiểu.

Câu 3.9 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}^*$ xác định bởi: $\forall a; b \in \mathbb{N}^*, aSb \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, b = a.5^n$.

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.

b) (1 điểm) Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, sup, inf của tập $X = \{1; 2; 3; 5; 10; 15; 25\}$.

Giải:

a) Với mọi $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ ta có

Phản xạ: $\forall a \in \mathbb{N}^*, a = a.5^0 \Rightarrow aSa$.
Phản xứng: $\forall a, b \in \mathbb{N}^*: aSb, bSa \Rightarrow \exists n; m \in \mathbb{N}, b = a.5^n; a = b.5^m$
$$\Rightarrow a = a.5^{n+m} \Rightarrow n + m = 0 \Rightarrow m = n = 0 \Rightarrow b = a.$$
Bắc cầu: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*: aSb, bSc \Rightarrow \exists n; m \in \mathbb{N}, b = a.5^n; c = b.5^m$
$$\Rightarrow c = a.5^{n+m} \Rightarrow aSc.$$

Do đó S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.
b) Phần tử tối đại của $X = \{1; 2; 3; 5; 10; 15; 25\}$: 10;15;25
Phần tử tối tiểu của $X = \{1; 2; 3; 5; 10; 15; 25\}$: 1; 2; 3
Vì $1S5, 5S25$. $2S10$. $3S15$
Tập X không có chặn trên nên không tồn tại $\sup X$.
Vì nếu $a \in \mathbb{N}^*$ là một chặn trên của X thì $1Sa, 2Sa$. Khi đó a vừa có dạng 5^n và 2.5^m với $n, m \in \mathbb{N}$ vô lý.

Tập X không có chặn dưới nên không tồn tại $\inf X$.

Vì nếu $b \in \mathbb{N}^*$ là một chặn dưới của X thì $bS1$ suy ra $1 = b.5^n, n \in \mathbb{N}$. Khi đó $b = 1$ và $n = 0$. Vậy $b = 1$. Đồng thời ta cũng phải có $1S2$ suy ra tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để $2 = 5^n$, vô lý.

Câu 3.10 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{R}$ xác định bởi: $\forall a; b \in \mathbb{R}, aSb \Leftrightarrow (a^2 + 1)(b + 1) = (a + 1)(b^2 + 1)$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.
b) (1 điểm) Xác định lớp tương đương $\overline{a}$, với $a \in \mathbb{R}$.

Giải:

a) Phản xạ: $\forall a \in \mathbb{R}, (a^2 + 1)(a + 1) = (a + 1)(a^2 + 1) \Rightarrow aSa$.
Đối xứng: $\forall a; b \in \mathbb{R}, aSb \Leftrightarrow (a^2 + 1)(b + 1) = (a + 1)(b^2 + 1)$
$$\Leftrightarrow (b^2 + 1)(a + 1) = (b + 1)(a^2 + 1) \Rightarrow bSa.$$
Bắc cầu: $\forall a; b; c \in \mathbb{R}, aSb, bSc \Rightarrow (a^2 + 1)(b + 1) =$
$$(a + 1)(b^2 + 1); (b^2 + 1)(c + 1) = (b + 1)(c^2 + 1)$$
$$\Rightarrow (a^2 + 1)(b + 1)(b^2 + 1)(c + 1) = (a + 1)(b^2 + 1)(b + 1)(c^2 + 1)$$
$$\Rightarrow (a^2 + 1)(c + 1) = (a + 1)(c^2 + 1) \Rightarrow aSc.$$

Vậy S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.

b) $\forall a \in \mathbb{R}, x \in \overline{a} \Leftrightarrow (x^2 + 1)(a + 1) = (x + 1)(a^2 + 1) \Leftrightarrow$

$$(x-a)(xa+x+a-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \text{nếu } a=-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=\dfrac{1-a}{1+a}, \end{array}\right. \quad \text{nếu } a\neq -1 \end{cases}$$

Do đó $\overline{a}=\begin{cases}\{-1\}, & \text{nếu } a=-1\\ \left\{a;\frac{1-a}{1+a}\right\}, & \text{nếu } a\neq -1\end{cases}$.

Câu 3.11 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{R}$ xác định bởi: $\forall a;b\in\mathbb{R}, aSb \Leftrightarrow a^3-b^3=3(a-b)$.

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.
b) (1 điểm) Xác định lớp tương đương $\overline{a}$, với $a\in\mathbb{R}$.

Giải:

a) Phản xạ: $\forall a\in\mathbb{R}, a^3-a^3=0=3(a-a)\Rightarrow aSa$.

Đối xứng: $\forall a;b\in\mathbb{R}, aSb\Leftrightarrow a^3-b^3=3(a-b)\Leftrightarrow b^3-a^3=3(b-a)\Leftrightarrow bSa$.

Bắc cầu: $\forall a;b;c\in\mathbb{R}, aSb, bSc\Rightarrow a^3-b^3=3(a-b), b^3-c^3=3(b-c)\Rightarrow (a^3-b^3)+(b^3-c^3)=3(a-b)+3(b-c)\Rightarrow$

$$a^3-c^3=3(a-c)\Rightarrow aSc.$$

Vậy S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.
b) $\forall a\in\mathbb{R}, x\in\overline{a}, xSa\Leftrightarrow x^3-a^3=3(x-a)\Leftrightarrow (x-a)(x^2+ax+a^2-3)=0$.

Tam thức bậc hai theo x: x^2+ax+a^2-3 có biệt số: $\Delta=a^2-4(a^2-3)=3(4-a^2)\geq 0\Leftrightarrow -2\leq a\leq 2$. Do đó:

$$\overline{a}=\begin{cases}\{-1;2\}, & \text{nếu } a=2\\ \{1;-2\}, & \text{nếu } a=-2\\ \{a\}, & \text{nếu } |a|>2\\ \left\{a;\dfrac{-a\pm\sqrt{3(4-a^2)}}{2}\right\}, & \text{nếu } |a|<2.\end{cases}$$

Câu 3.12 (2 điểm): Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{R}$ xác định bởi: $\forall a,b\in\mathbb{R}, aSb\Leftrightarrow f(a)=f(b)$.

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.
b) (1 điểm) Chứng minh rằng S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu f là một đơn ánh.

Giải:

a) $\forall a \in \mathbb{R}, f(a) = f(a) \Rightarrow aSa$ (phản xạ)

$\forall a, b \in \mathbb{R}, aSb \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(b) = f(a) \Leftrightarrow bSa$. (Đối xứng)

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, aSb, bSc \Rightarrow f(a) = f(b), f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c)$
$\Rightarrow aSc$. (Bắc cầu)

Do đó S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.

b) Giả sử S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$. Khi đó, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ mà $f(a) = f(b)$ thì ta có aSb và bSa nên $a = b$. Vậy f là đơn ánh. Ngược lại, nếu f là đơn ánh và aSb, bSa thì $f(a) = f(b)$ nên $a = b$. Do đó S có tính phản xứng. Vậy S là một quan hệ thứ tự.

Câu 3.13 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}^*$ xác định bởi: $\forall a; b \in \mathbb{N}^*, aSb \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, b = a.5^n$.

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N}^*$.

b) (1 điểm) Xác định các lớp tương đương $\overline{2}, \overline{5}$.

Giải: a) Với mọi $a \in \mathbb{N}^*$, $a = a.5^0$ nên S phản xạ.

Với mọi $a, b \in \mathbb{N}^*, aSb \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, b = a.5^n \Leftrightarrow a = b.5^{-n} \Leftrightarrow bSa$.

Với mọi $a, b, c \in \mathbb{N}^*, aSb, bSc \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}, b = a.5^m, c = b.5^n$

$$\Rightarrow c = a.5^{m+n} \Rightarrow aSc.$$

Do đó S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N}^*$.

c) $\forall x \in \mathbb{N}^*, x \in \overline{2} \Leftrightarrow 2Sx \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, x = 2.5^n, n \in \mathbb{N}$. Vậy

$$\overline{2} = \{2.5^n | n \in \mathbb{N}\}.$$

$\forall x \in \mathbb{N}^*, x \in \overline{5} \Leftrightarrow 5Sx \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, x = 5.5^n = 5^{n+1}, n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

Câu 3.14 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{R}$ xác định bởi: $\forall x, y \in \mathbb{R}, xSy \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1$.

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.

b) (1 điểm) Xác định lớp tương đương của $\overline{\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \overline{\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.

Giải:

a) Phản xạ: $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên xSx.

Đối xứng: $\forall x, y \in \mathbb{R}, xSy \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + 1 - \sin^2 y = 1 \Leftrightarrow \sin^2 y + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow ySx$.

Bắc cầu: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \begin{cases} xSy \\ ySz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y + \cos^2 z = 2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 z = 1 \Rightarrow xSz.$

Do đó S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.

$x \in \overline{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow xS\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy: $\overline{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$x \in \overline{\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow xS\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 \frac{2\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$
$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy: $\overline{\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \left\{\pm\frac{\pi}{3} + k\pi \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 3.15 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}^*$ xác định bởi: $\forall m, n \in \mathbb{N}^*, mSn \Leftrightarrow m \,\vdots\, n \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}^*, m = qn.$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.
b) (1 điểm) Xác định các phần tử tối đại, phần tử tối tiểu, chặn trên, chặn dưới, sup, inf của tập $X = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15\}$.

Giải:

a) Phản xạ: $\forall m \in \mathbb{N}^*, m = 1.m$ nên mSm.

Phản xứng: $\forall m, n \in \mathbb{N}^*, mSn \wedge nSm \Rightarrow \exists q; r \in \mathbb{N}^*, (m = qn) \wedge (n = rm) \Rightarrow m = qrm \Rightarrow qr = 1 \Rightarrow r = q = 1 \Rightarrow m = n.$

Bắc cầu: $\forall m, n, p \in \mathbb{N}^*, mSn \ \wedge nSp \Rightarrow$

$$\exists q; q' \in \mathbb{N}^*, (m = qn) \wedge (n = q'p) \Rightarrow m = qq'p \Rightarrow mSp$$

Vậy S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.

b) Phần tử tối đại của X là 1.

Các phần tử tối tiểu của X là: $7; 8; 9; 10; 12; 15$.
Tập các chặn dưới của X là $\{2^3.3^2.5.7.k | k \in \mathbb{N}^*\}$ nên $\inf X = 2520$.
Tập chặn trên của X là $\{1\}$ nên $\sup X = 1$.

Câu 3.16 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{R}$ xác định bởi: $\forall a, b \in \mathbb{R}, aSb \Leftrightarrow a^2 - b^2 = a - b$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.
b) (1 điểm) Xác định lớp tương đương $\overline{a}$, với $a \in \mathbb{R}$.

Giải:
a) Với mọi $a, b, c \in$ □ ta có

- $a^2-a^2=a-a\Rightarrow aSa\Rightarrow S$ có tính phản xạ.
- $aSb\Rightarrow a^2-b^2=a-b\Rightarrow b^2-a^2=b-a\Rightarrow bSa\Rightarrow S$ có tính đối xứng.
- $\begin{cases}aSb\\ bSc\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-b^2=a-b\\ b^2-c^2=b-c\end{cases}\Rightarrow a^2-c^2=a-c\Rightarrow S$ có tính bắc cầu.

Vậy S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.

b) $x\in\overline{a}\Leftrightarrow xSa\Leftrightarrow x^2-a^2=x-a\Leftrightarrow(x-a)(x+a-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\ x=1-a\end{array}\right.$

Do đó $\overline{a}=\{a;1-a\}$

Câu 3.17 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}^2$ xác định bởi:

$\forall(m;n),(m';n')\in\mathbb{N}^2,(m;n)S(m';n')\Leftrightarrow\begin{cases}m-m'=2k\\ n-n'=2k'\end{cases}k,k'\in\mathbb{N}$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N}^2$.

b) (1 điểm) Xác định tập thương của $\mathbb{N}^2$ theo quan hệ tương đương S.

Giải:

a) Với mọi $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}^2$ ta có
- $\begin{cases}a-a\,\vdots\,2\\ b-b\,\vdots\,2\end{cases}\Rightarrow(a,b)S(a,b)\Rightarrow S$ có tính phản xạ.
- $(a,b)S(c,d)\Rightarrow\begin{cases}a-c\,\vdots\,2\\ b-d\,\vdots\,2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c-a\,\vdots\,2\\ d-b\,\vdots\,2\end{cases}\Rightarrow(c,d)S(a,b)\Rightarrow S$ có tính đối xứng.
- $\begin{cases}(a,b)S(c,d)\\ (c,d)S(e,f)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-c\,\vdots\,2,b-d\,\vdots\,2\\ c-e\,\vdots\,2,d-f\,\vdots\,2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-e\,\vdots\,2\\ b-f\,\vdots\,2\end{cases}\Rightarrow(a,b)S(e,f)\Rightarrow S$ có tính bắc cầu.

Vậy S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N}$.

b) Tập thương

$\mathbb{N}^2/S=\left\{\overline{(0;0)},\overline{(0;1)},\overline{(1;0)},\overline{(1;1)}\right\}$

Câu 3.18 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ xác định bởi:$\forall(p;q),(p';q')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$

$$(p;q)S(p';q')\Leftrightarrow\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}.$$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$.

b) (1 điểm) Xác định các lớp tương đương $\overline{(1;2)},\overline{(2;3)}$.

Giải:

a) Với mọi $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ ta có
- $ab=ba\Rightarrow(a,b)S(a,b)\Rightarrow S$ có tính phản xạ.

- $(a,b)S(c,d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c,d)S(a,b) \Rightarrow S$ có tính đối xứng.

- $\begin{cases}(a,b)S(c,d)\\(c,d)S(e,f)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}ad = bc\\cf = de\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}\\[2mm]\dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}\end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{e}{f}$

$\Rightarrow af = be \Rightarrow (a,b)S(e,f) \Rightarrow S$ có tính bắc cầu.

Vậy S là một quan hệ tương đương trên □ .

b)

$$(x;y)S(1;2) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x;y) = (n;2n), n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \overline{(1;2)} = \{(n;2n) | n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$(x;y)S(2;3) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (x;y) = (2n;3n), n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \overline{(2;3)} = \{(2n;3n) | n \in \mathbb{N}^*\}$$

Câu 3.19 (2 điểm): Ký hiệu $\wp(X)$ à tập các tập con của tập: $X = \{0;1;2;3;4;5;6\}$. $\prec$ là một quan hệ hai ngôi trên $\wp(X)$ xác định bởi:

$$\forall A, B \in \wp(X), A \prec B \Leftrightarrow A \subset B.$$

a) (1 điểm) Chứng minh $\prec$ là một quan hệ thứ tự trên $\wp(X)$.

b) (1 điểm) Xác định các phần tử tối đại, tối tiểu, sup, inf của tập $Y = \{\{0\},\{0;1;2\},\{0;1;3\},\{1;2;3\},\{2;3;4\},\{0;1;3;4;5\}\}$.

Giải:

a) Với mọi $A, B, C \in P(X)$ ta có

- $A \subset A \Rightarrow A \prec A \Rightarrow \prec$ có tính phản xạ.

- $\begin{cases}A \prec B\\B \prec A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A \subset B\\B \subset A\end{cases} \Rightarrow A = B \Rightarrow \prec$ có tính phản đối xứng.

- $\begin{cases}A \prec B\\B \prec C\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A \subset B\\B \subset C\end{cases} \Rightarrow A \subset C \Rightarrow A \prec C \Rightarrow \prec$ có tính bắc cầu.

Do đó $\prec$

là một quan hệ thứ tự trên $P(X)$.

b) Phần tử tối tiểu của Y: $\{0\};\{1;2;3\};\{2;3;4\}$.

Phần tử tối đại của Y: $\{0;1;2\};\{1;2;3\};\{2;3;4\};\{0;1;3;4;5\}$.

$\sup Y = X = \{0;1;2;3;4;5\}, \inf Y = \varnothing$.

Câu 3.20 (2 điểm): Cho S là một quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}^*$ xác định bởi: $\forall a; b \in \mathbb{N}^*, aSb \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, b = a^n$

a) (1 điểm) Chứng minh S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.

b) (1 điểm) Xác định các phần tử tối đại, tối tiểu, chặn trên, chặn dưới của tập $X = \{3; 9; 27; 81\}$.

Giải:

a) Với mọi $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ ta có

- $a = a^1 \Rightarrow aSa \Rightarrow S$ có tính phản xạ.
- $\begin{cases} aSb \\ bSa \end{cases} \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : \begin{cases} b = a^m \\ a = b^n \end{cases} \Rightarrow b = b^{mn} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ mn = 1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ m = n = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 1 \\ a = b \end{array}\right. \Rightarrow S$ có tính phản đối xứng.

- $\begin{cases} aSb \\ bSc \end{cases} \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : \begin{cases} b = a^m \\ c = b^n \end{cases} \Rightarrow c = a^{mn} \Rightarrow aSc \Rightarrow S$ có tính bắc cầu

Do đó S là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$.

b) Phần tử rối đại: 27; 81

Phần tử tối tiểu: 3

Tập các chặn trên: $\{3^{12k} \mid k \in \mathbb{N}\}$

Chặn dưới: 3

IV

Phương pháp chứng minh qui nạp.

- Dùng để chứng minh một mệnh đề toán học liên quan đến số tự nhiên, mà gọi là $\wp(n), n \in \mathbb{N}$.
- Chú ý: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots; n; n+1; \dots\}$
- Các bước của một chứng minh qui nạp:

a) Kiểm tra mệnh đề $\wp(n_0)$ là đúng, với $n_0 \in \mathbb{N}$.
b) Phát biểu giả thiết qui nạp: giả sử mệnh đề $\wp(n)$ trong đó $n \geq n_0$ (nào đó) là đúng.
c) Chứng minh, khi đó mệnh đề $\wp(n+1)$ cũng đúng.
d) Kết luận mệnh đề $\wp(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Số phức

- Kí hiệu**:**

$\mathbb{C} = \{z = x + iy |\ x; y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}, x = \operatorname{Re} z$ (phần thực); $y = \operatorname{Im} z$(phần ảo)

- $x + yi$ được gọi là dạng đại số của số phức z
- Đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ được gọi là mô-đun của z. $\varphi = (Ox; OM)$ trong đó M là điểm trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ có toạ độ $M(x; y)$. φ được gọi là argument của số phức z.
- Khi đó $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ được gọi là dạng lượng giác của z. Chú ý:
$$\cos\varphi = \frac{x}{r}; \sin\varphi = \frac{y}{r}$$
- Kí hiệu $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ thì ta có dạng mũ của số phức $z = re^{i\varphi}$.

Cho $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$ khi đó $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$

Cho $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ và $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ khi đó $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ và khi $z_2 \neq 0$ thì
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Chú ý: Nếu $z = x + iy$ thì $\overline{z} = x - iy$ và nếu $z = re^{i\varphi}$ thì $\overline{z} = re^{-i\varphi}$

Căn bậc n của số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Kí hiệu $\omega = \rho e^{i\psi}$ là căn bậc n của $z = re^{i\varphi}$ khi đó $\omega^n = z$. Suy ra
$$re^{i\varphi} = \left(\rho e^{i\psi}\right)^n = \rho^n e^{in\psi}$$
Do đó

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \dfrac{\varphi}{n} + k\dfrac{2\pi}{n} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

Từ đây suy ra

$$\omega = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}}; k \in \mathbb{Z}.$$

Do tính tuần hoàn của các hàm $\cos x$ và $\sin x$ ta có đúng n căn bận n

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}}; k \in \{0; 1; 2; \dots; (n-1)\}$$

Toạ vị của các ω_k là các đỉnh của một n giác đều, nội tiếp trong một đường tròn có tâm tại 0, bán kính $\sqrt[n]{r}$.

Căn bậc n của 1.

Do $1 = e^{i0}$ nên n căn bậc n của 1 là $\omega_k = e^{k\frac{2\pi}{n}}, k \in \{0; 1; 2; \dots; (n-1)\}$.

Từ đây ta suy ra, nếu đặt $\omega = \omega_1 = e^{\frac{2\pi}{n}}$ thì $\omega_k = e^{k\frac{2\pi}{n}} = \left(e^{\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \omega^k$.

Đạo hàm cấp cao

Giả sử hàm $f(x)$ khả vi trên $(a; b) \subset \mathbb{R}$. Khi đó ta có hàm đạo hàm $f^{'}(x)$ trên $(a; b)$. Đạo hàm của $f^{'}(x)$ (nếu có) được gọi là đạo hàm cấp hai của f và kí hiệu là $f^{''}$ hay $f^{(2)}$, tức là đạo hàm cấp hai là đạo hàm của hàm đạo hàm cấp một, ... tương tự, đạo hàm của hàm đạo hàm cấp n được gọi là đạo hàm cấp $(n+1)$ của hàm f:

$$\left(f^{(n)}\right)^{'} = f^{(n+1)}.$$

KHỐI 4:

Câu 4.1 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$2^3 + 4^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2.$$

b) (1 điểm) Tính

$$\frac{(1-i)^n}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^n}.$$

Giải: a)

+ Khi $n = 1$: $2^3 = 2.1^2(1+1)^2$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$2^3 + 4^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$$

+ Khi đó

$$2^3+4^3+\cdots+(2n)^3+\big(2(n+1)\big)^3=2n^2(n+1)^2+8(n+1)^3$$
$$=2(n+1)^2\big(n^2+4(n+1)\big)=2(n+1)^2(n+2)^2.$$
Do đó đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.
b)

$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$$
$$1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2e^{\frac{5\pi}{3}i}$$
$$\frac{(1-i)^n}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^n}=\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}}{2e^{\frac{5\pi}{3}i}}\right)^n=\left(\frac{e^{\left(\frac{7}{4}-\frac{5}{3}\right)\pi i}}{\sqrt{2}}\right)^n$$
$$=\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{12}}}{\sqrt{2}}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{2}^n}\left(\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12}\right).$$

Câu 4.2 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

b) (1 điểm) Tính

$$\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}{(1+i)^{n+1}}.$$

Giải:a)

+ Khi $n=1$: $1^3=\left[\frac{1}{2}(1+1)\right]^2$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n\geq 1$, tức là

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

+ Khi đó

$$1^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2+(n+1)^3$$
$$=(n+1)^2\left(\frac{1}{4}n^2+(n+1)\right)=\left[\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right]^2.$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.
b)

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}{(1+i)^{n+1}}=\frac{2^n\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n}{2^{\frac{n+1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}}{\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}$$
$$=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\frac{e^{\frac{n}{3}\pi i}}{e^{\frac{n+1}{4}\pi i}}=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}e^{\frac{n-3}{12}\pi i}=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{(n-3)\pi}{12}+i\sin\frac{(n-3)\pi}{12}\right).$$

Câu 4.3 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh bằng quy nạp bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{3n}{2n+1}$$

Với mọi số nguyên $n\geq 2$.

b) (1 điểm) Tìm dạng lượng giác của số phức

$$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$$

Giải:

+ Khi $n=2$: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}>\frac{3.2}{2.2+1}$ đúng

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n\geq 2$, tức là

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{3n}{2n+1}$$

+ Khi đó

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{3n}{2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$=\frac{3n^3+6n^2+5n+1}{(2n+1)(n+1)^2}>\frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$$

Do đó bất đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy bất đẳng thức đúng với mọi số nguyên $n\geq 2$.

b) $$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)}$$
$$=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha.$$

Câu 4.4 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh bằng quy nạp bất đẳng thức sau:

$$\frac{5}{7}.\frac{9}{11}.\frac{13}{15}\cdots\frac{4n+1}{4n+3}>\sqrt{\frac{3}{4n+3}}$$

Với mọi số nguyên $n \geq 1$

b) (1 điểm) Tìm các căn bậc ba của $1 - i\sqrt{3}$.
Giải:

+ Khi $n = 1$: $\frac{5}{7} > \sqrt{\frac{3}{4+3}}$ đúng

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$\frac{5}{7}.\frac{9}{11}.\frac{13}{15}\cdots\frac{4n+1}{4n+3} > \sqrt{\frac{3}{4n+3}},$$

+ Khi đó

$$\frac{5}{7}.\frac{9}{11}.\cdots\frac{4n+1}{4n+3}.\frac{4n+5}{4n+7} > \sqrt{\frac{3}{4n+3}}.\frac{4n+5}{4n+7} > \sqrt{\frac{3}{4n+7}}.$$

$$\left(\text{vì } \sqrt{\frac{3}{4n+3}}.\frac{4n+5}{4n+7} > \sqrt{\frac{3}{4n+7}} \Leftrightarrow \frac{4n+5}{\sqrt{(4n+3)(4n+7)}} > 1\right.$$

$$\Leftrightarrow (4n+5)^2 > (4n+3)(4n+7) \Leftrightarrow 25 > 21 \Leftrightarrow 4 > 0.)$$

Do đó bất đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy bđt đúng với mọi số nguyên dương n.

b) $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2e^{i\pi\frac{5}{3}}$

$$u_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)$$

$$u_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$$

$$u_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right)$$

$$u_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right)$$

Câu 4.5 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}.$$

b) (1 điểm) Tìm các căn bậc ba của $(1+i)/\sqrt{2}$.

Giải:

+ Khi $n = 1$: $1^2 = \frac{(-1)^0.1.(1+1)}{2}$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$$

+ Khi đó

$$1^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2+(-1)^n(n+1)^2=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}+(-1)^n(n+1)^2$$

$$=\frac{(-1)^n}{2}(n+1)(2n+2-n+)=\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}.$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

$$u_k=\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}$$

$$u_0=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$$

$$u_1=\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}$$

$$u_2=\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}$$

Câu 4.6 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$(n^3+3n^2+5n)\ \vdots\ 3$$

b) (1 điểm) Cho hai số thực a,b thỏa mãn $a<b$ và $x\in(a,b)$. Chỉ ra số $\epsilon>0$ sao cho

$$(x-\epsilon,x+\epsilon)\subset(a,b).$$

Giải:a)

+ Khi $n=1$: $1+3+5=9\ \vdots\ 3$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n\geq 1$, tức là

$$n^3+3n^2+5n\ \vdots\ 3$$

+ Khi đó

$$(n+1)^3+3(n+1)^2+5(n+1)=(n^3+3n^2+5n)+3(n^2+3n+3)\ \vdots\ 3$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Đặt $0<\epsilon\leq\min\{x-a,b-x\}$.

Khi đó $x-\varepsilon\geq x-(x-a)=a$ và $x+\varepsilon\leq x+(b-x)=b$. Nên

$$a\leq x-\varepsilon<x+\varepsilon\leq b.$$

Vậy:

$$(x-\epsilon,x+\epsilon)\subset(a,b).$$

Câu 4.7 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$(4^n + 15n - 1) \vdots 9$$

b) (1 điểm) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a < b$. Chứng minh rằng

$$x \in (a, b) \Leftrightarrow \exists \lambda \in (0,1): x = \lambda a + (1 - \lambda)b.$$

Giải: a)

+ Khi $n = 1: 4 + 15 - 1 = 18 \vdots 9$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$4^n + 15n - 1 \vdots 9$$

+ Khi đó

$$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4(4^n + 15n - 1) - 9(5n - 2) \vdots 9$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Nếu $x \in (a, b)$ thì chọn $\lambda = \frac{b-x}{b-a} \in (0,1)$ vì $0 < b - x < b - a$. Khi đó

$$\lambda = \frac{b - x}{b - a} \Leftrightarrow b - x = \lambda(b - a) \Leftrightarrow x = b - \lambda(b - a) = \lambda a + (1 - \lambda)b.$$

Ngược lại, nếu $\exists \lambda \in (0,1): x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ thì

$$a = \lambda a + (1 - \lambda)a < \lambda a + (1 - \lambda)b < \lambda b + (1 - \lambda)b = b$$

hay $x \in (a, b)$.

Câu 4.8 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$(n^3 + 11n) \vdots 6$$

b) (1 điểm) Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại $i \in \{1,2, \dots, n\}$ sao cho $x_i \geq \frac{1}{n}$.

Giải:

+ Khi $n = 1: 1 + 11 = 12 \vdots 6$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$n^3 + 11n \vdots 6$$

+ Khi đó

$$(n + 1)^3 + 11(n + 1) = (n^3 + 11n) + 3n(n + 1) + 12 \vdots 6$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Giả sử $x_i < 1/n$ với mọi $i \in \{1,2, \dots, n\}$. Lúc đó

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n < n\frac{1}{n} = 1 \text{ (vô lí)}$$

Câu 4.9 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$(2n^3 - 3n^2 + n) \vdots 6$$

b) (1 điểm) Chứng tỏ

$$\inf\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\} = 0.$$

Giải:

a) + Khi $n = 1: 2 - 3 + 1 = 0 \vdots 6$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$2n^3 - 3n^2 + n \vdots 6$$

+ Khi đó

$$2(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + (n+1) = (2n^3 - 3n^2 + n) + 6n^2 \vdots 6$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) + Ta có $\frac{1}{n} \geq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

+ Với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{1}{n} < \epsilon$. (Chẳng hạn, chọn $n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$). Từ đó suy ra đpcm.

$$\alpha = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \leq a, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a < \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

Câu 4.10 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có: đạo hàm cấp n

$$[\ln(ax+b)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!.a^n}{(ax+b)^n}$$

b) (1 điểm) Chứng tỏ

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(n, +\infty) = \emptyset.$$

+ Khi $n = 1: [\ln(ax+b)]' = \frac{a}{ax+b}$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$[\ln(ax+b)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!.a^n}{(ax+b)^n}$$

+ Khi đó

$$[\ln(ax+b)]^{(n+1)} = \left[\frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!.a^n}{(ax+b)^n}\right]' = \frac{(-1)^n.n!.a^{n+1}}{(ax+b)^{n+1}}$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ (có thể chọn $n = [x] + 1$) sao cho $n > x$, do đó $x \notin (n, +\infty)$. Nên $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}(n, +\infty)$. Vậy $\bigcap_{n=1}^{\infty}(n, +\infty) = \emptyset$.

Câu 4.11 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!.a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

b) (1 điểm) Tìm supremum và infimum của tập sau trong $\mathbb{R}$ (không cần chứng minh)

$$A = \left\{\frac{n}{2n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Giải: a)

+ Khi $n = 1$: $\left[\frac{1}{ax+b}\right]' = \frac{-a}{(ax+b)^2}$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$\left[\frac{1}{ax+b}\right]^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!.a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

+ Khi đó

$$\left[\frac{1}{ax+b}\right]^{(n+1)} = \left[\frac{(-1)^n.n!.a^n}{(ax+b)^{n+1}}\right]' = \frac{(-1)^{n+1}.(n+1)!.a^{n+1}}{(ax+b)^{n+2}}$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) $\sup A = \frac{1}{2}$ và $\inf A = \frac{1}{3}$.

$$\left(\text{Do } \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \cdots < \frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2(n+1)+1} \cdots < \frac{1}{2}\right)$$

Câu 4.12 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có: đạo hàm cấp n

$$(\sin 2x)^{(n)} = 2^n \sin(2x + \frac{n\pi}{2})$$

b) (1 điểm) Cho ω là một nghiệm phức của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$. Tính ω^3.

Giải:

+ Khi $n = 1$: $[\sin 2x]' = 2\cos 2x = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2})$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$[\sin 2x]^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

+ Khi đó

$$[\sin 2x]^{(n+1)} = \left([\sin 2x]^{(n)}\right)' = \left[2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]' = 2^{n+1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$$
$$= 2^{n+1}\sin\left(2x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n+1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Ta có $\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$ hay $\omega^3 = 1$.

Câu 4.13 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$3 + 9 + 27 + \cdots + 3^n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$$

b) (1 điểm) Cho ω là một nghiệm phức của phương trình $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Tính ω^4

Giải: a)

+ Khi $n = 1: 3 = \frac{1}{2}(3^2 - 3)$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$3 + 9 + 27 + \cdots + 3^n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$$

+ Khi đó

$$3 + 9 + \cdots + 3^n + 3^{n+1} = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3) + 3^{n+1} = \frac{1}{2}(3^{n+2} - 3)$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Ta có $\omega^4 - 1 = (\omega - 1)(\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1) = 0$ hay $\omega^4 = 1$.

Câu 4.14 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$(n + 1)(n + 2) \dots (n + n) = 2^n.1.3.5 \dots (2n - 1)$$

b) (1 điểm) Giải phương trình sau trong $\mathbb{C}$: $z^3 - 2 - 2i = 0$.

Giải:a)

+ Khi $n = 1: 1 + 1 = 2$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$(n + 1)(n + 2) \dots (n + n) = 2^n.1.3.5 \dots (2n - 1)$$

+ Khi đó

$$(n + 2)(n + 3) \dots (2n + 2) = \frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3) \dots (2n)(2n + 1)(2n + 2)}{n + 1}$$

$$= \frac{2^n.1.3 \dots (2n - 1)(2n + 1)(2n + 2)}{n + 1} = 2^{n+1}1 \dots (2n - 1)(2(n + 1) - 1)$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

$b)$ $z^3 = 2(1 + i) = 2\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ suy ra

$$z = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm

$$z_0 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}), z_1 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}),\ \ z_2 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}).$$

Câu 4.15 (2 điểm):

a) (1 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{(n+1)u_n}{3n}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$u_n = \frac{n}{3^n}, \forall n \geq 1$$

b) (1 điểm) Biểu diễn tập hợp sau trên mặt phẳng phức

$$A = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z + \bar{z}| \leq 2, |z - \bar{z}| \leq 2 \,\}.$$

Giải:

+ Khi $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{3}$ đúng

+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$u_n = \frac{n}{3^n}$$

+ Khi đó

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{3n} = \frac{(n+1)\frac{n}{3^n}}{3n} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) $b)$ $A = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z + \bar{z}| \leq 2, |z - \bar{z}| \leq 2 \,\}$. Đặt $z = a + ib$ khi đó $\overline{z} = a = ib$ nên $z + \bar{z} = 2a$ và $z - \bar{z} = 2b$. Vậy $z = a + ib \in A$ khi và chỉ khi $|a| \leq 1$ và $|b| \leq 1$.

A chính là hình vuông $[-1,1] \times [-1,1]$ trong mặt phẳng phức, có 4 đỉnh là $M(1;1), N(-1;1), P(-1;-1), Q(1;-1)$.

Câu 4.16 (2 điểm):

a) (1 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2^n, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$u_n = 5.3^{n-1} - 2^{n+1}, \forall n \geq 1$$

b) (1 điểm) Biểu diễn tập hợp sau trên mặt phẳng phức

$$B = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\text{Re } z| + |\text{Im } z| \leq 1 \}.$$

Giải: a)

+ Khi $n = 1$: $u_1 = 1$ đúng
+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$u_n = 5.3^{n-1} - 2^{n+1}$$

+ Khi đó

$$u_{n+1} = 3u_n + 2^{n+1} = 3(5.3^{n-1} - 2^{n+1}) + 2^{n+1} = 5.3^n - 2^{n+2}$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

$$b)\ B = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\text{Re } z| + |\text{Im } z| \leq 1 \}$$

$$z = a + ib \in B \text{ khi và chỉ khi } |a| + |b| \leq 1.$$

B là hình vuông (đặc) với 4 đỉnh $M(1,0), N(0,1), P(-1,0), Q(0,-1)$.

Câu 4.17 (2 điểm):

a) (1 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 5u_{n-1} + 2.3^n - 6.7^n + 12, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$u_n = 157.5^{n-1} - 3^{n+1} - 3.7^{n+1} - 3, \forall n \geq 1$$

b) (1 điểm) Biểu diễn tập hợp sau trên mặt phẳng phức

$$C = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, 0 \leq \text{Im } z, 0 \leq \text{Re } z \}.$$

Giải: a)
+ Khi $n = 1$: $u_1 = -2$ đúng
+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$u_n = 157.5^{n-1} - 3^{n+1} - 3.7^{n+1} - 3$$

+ Khi đó

$$u_{n+1} = 5(157.5^{n-1} - 3^{n+1} - 3.7^{n+1} - 3) + 2.3^{n+1} - 6.7^{n+1} + 12$$
$$= 157.5^n - 3^{n+2} - 3.7^{n+2} - 3$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) C là ¼ hình tròn đơn vị nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Câu 4.18 (2 điểm):

a) (1 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3^n - n, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$u_n = -11.2^{n-1} + 3^{n+1} + n + 2, \forall n \geq 1$$

b) (1 điểm) Tìm các căn bậc năm của đơn vị 1.

Giải:

+ Khi $n = 1: u_1 = 1$ đúng
+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$u_n = -11.2^{n-1} + 3^{n+1} + n + 2$$

+ Khi đó

$$u_{n+1} = 2u_n + 3^{n+1} - (n+1) = 2(-11.2^{n-1} + 3^{n+1} + n + 2) + 3^{n+1} - n - 1$$
$$= -11.2^n + 3^{n+2} + n + 1 + 2$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b)Có 5 căn bậc năm của $1 = \cos 0 + i \sin 0 = e^{i0}$.

$$\omega_k = \cos\frac{k2\pi}{5} + i\sin\frac{k2\pi}{5}, \qquad k = 0,1,2,3,4.$$

Câu 4.19 (2 điểm):

a) (1 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{2u_{n-1}}{3u_{n-1} + 4}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$u_n = \frac{2}{5.2^{n-1} - 3}, \forall n \geq 1$$

b) (1 điểm) Sử dụng công thức Moirve tìm khai triển $\cos 3x$ theo $\cos x$ và $\sin 3x$ theo $\sin x$.

Giải: a)
+ Khi $n = 1: u_1 = 1$ đúng
+ Giả sử đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$u_n = \frac{2}{5.2^{n-1} - 3}$$

+ Khi đó

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{3u_n + 4} = \frac{2\dfrac{2}{5.2^{n-1} - 3}}{3\dfrac{2}{5.2^{n-1} - 3} + 4} = \frac{2}{5.2^n - 3}$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

Ta có công thức Moivre: $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$ hay $e^{inx} = (e^{ix})^n$.

$$\cos 3x + i\sin 3x = (\cos x + i \sin x)^3$$
$$= \cos^3 x + 3\cos^2 x\, i \sin x + 3 \cos x\, i^2 \sin^2 x + i^3 \sin^3 x$$
$$= \cos^3 x + 3(1 - \sin^2 x) i \sin x - 3\cos x\,(1 - \cos^2 x) - i \sin^3 x$$

$$= (4\cos^3 x - 3\cos x) + i(3\sin x - 4\sin^3 x)$$

Từ đó suy ra $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ và $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Câu 4.20 (2 điểm):

a) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

b) (1 điểm) Chứng tỏ tổng các căn bậc n $(n \geq 2)$ của 1 bằng 0.

Giải:a)

+ Khi $n = 1$: $1 < 2$ đúng

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n \geq 1$, tức là

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

+ Khi đó

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$

Do đó đẳng thức đúng đến $n + 1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Có n căn bậc n của đơn vị là $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$, trong đó

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Suy ra

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$$

V

Đa thức bậc n: $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ trong đó $a_0 \neq 0$. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các số thực cho trước, gọi là hệ số của đa thức. Khi $a_k \in \mathbb{R}, k = 0; 1; 2; \ldots; n$ thì ta nói đa thức $P_n(x)$ có hệ số thực, kí hiệu $P_n \in \mathbb{R}[x]$, tương tự ta có tập các đa thức hệ số hữu tỉ $\mathbb{Q}[x]$, tập các đa thức có hệ số phức $\mathbb{C}[x]$.

Nếu $P_n(x_0) = 0$ thì

$$P_n(x) = P_n(x) - P_n(x_0) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
$$-(a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n)$$
$$= a_0(x^n - x_0^n) + a_1(x^{n-1} - x_0^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(x - x_0)$$
$$= (x - x_0)P_{n-1}(x)$$

Ta nói x_0 là một nghiệm của đa thức $P_n(x)$.

Người ta chứng minh được rằng, đa thức bậc n hệ số thực có nhiều nhất n nghiệm thực. Khi $P_n(x) = (x - x_0)^2P_{n-2}(x)$ và $P_{n-2}(x_0) \neq 0$ ta nói x_0 là nghiệm bội 2 hay là nghiệm kép của đa thức $P_n(x)$. Tương tự, khi $P_n(x) = (x - x_0)^kP_{n-k}(x)$ và $P_{n-k}(x_0) \neq 0$ ta nói x_0 là nghiệm bội k của đa thức $P_n(x)$.

Nếu đa thức hệ số thực $P_n(x)$ có nghiệm là số phức $z = a + ib$ thì số phức liên hiệp của số phức z là $\overline{z} = a - ib$ cũng là nghiệm của $P_n(x)$.

Một đa thức được bất khả qui trên trường số thực (phức) nếu nó không phân tích được thành tích của đa thức hệ số thực (phức) có bậc nhỏ hơn.

Các đa thức bất khả qui trên trường số thực có dạng bậc nhất hoặc đa thức bậc hai với biệt số $\Delta < 0$.

Ước chung lớn nhất của hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ là đa thức $D(x)$ nếu $D(x)$ là ước chung của hai đa thức này và nếu $d(x)$ là một ước chung bất kỳ của $P(x)$ và $Q(x)$ thì $d(x)$ cũng là ước của $D(x)$. Kí hiệu $D(x) = \big(P(x), Q(x)\big)$. Khi $D(x) \equiv 1$ thì ta nói hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ nguyên tố cùng nhau.

Cách tìm USC lớn nhất của hai đa thức $\boldsymbol{P(x)}$ và $\boldsymbol{Q(x)}$, bậc của $\boldsymbol{Q} \leq$ bậc của $\boldsymbol{P}$.

Chia có dư P cho Q có thương là T_1 và dư là R_1; $\deg R_1 < \deg Q$,

$$P = QT_1 + R_1,$$

Chia có dư Q cho R_1 có thương là T_2 và dư là $R_2, \deg R_2 < \deg R_1$.

$$Q = R_1T_2 + R_2$$

...

Chia có dư R_{n-2} cho R_{n-1} có thương là T_n dư là R_n

$$R_{n-2} = R_{n-1}T_n + R_n$$

Chia có dư R_{n-1} cho R_n có thương là T_{n+1} dư là 0.

Kết luận: R_n là USC lớn nhất của P và Q.

Khi đó

$$R_n = R_{n-2} - R_{n-1}T_n$$
$$= R_{n-2} - T_n(R_{n-3} - R_{n-2}T_{n-1}) = -T_nR_{n-3} + (1 - T_{n-1})R_{n-2}$$

...

$$R_n = PU + QV.$$

Câu 5.1 (2 điểm): Cho đa thức hệ số thực

$$P(x) = x^6 - x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$$

a) Chứng tỏ i là nghiệm kép của $P(x)$.

b) Hãy phân tích $P(x)$ thành tích các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{R}$.

Giải: a) Sử dụng phép chia hai đa thức cho nhau ta có

$$P(x) = (x^2+1)^2(x^2 - x + 1)$$
$$P(x) = (x-i)^2(x+i)^2(x^2 - x + 1)$$

Nên i là nghiệm kép của $P(x)$

b)

$$P(x) = (x^2+1)^2(x^2 - x + 1)$$

$x^6 - x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$	$x^4 + 2x^2 + 1$
$x^6 \quad + 2x^4 \quad + x^2$	x^2
$-x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$	
$-x^5 - \quad 2x^3 \quad - x$	
$x^4 + 2x^2 + 1$	$-x$
$x^4 + 2x^2 + 1$	
0	1

Câu 5.2 (2 điểm): Trong $\mathbb{R}[x]$ cho hai đa thức $f(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 4$ và $g(x) = x^2 + x + 1$.

a) $f(x)$ và $g(x)$ có nguyên tố cùng nhau hay không?

b) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau, hãy tìm hai đa thức $r(x)$ và $s(x)$ sao cho $1 = r(x)f(x) + s(x)g(x)$.

Giải:

$x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 4$	$x^2 + x + 1$
$x^4 + x^3 \quad + x^2$	x^2
$2x^3 + 5x^2 + 6x + 4$	
$2x^3 + 2x^2 + 2x$	$2x$
$3x^2 + 4x + 4$	
$3x^2 + 3x + 3$	3
$x + 1$	

$$f(x) = g(x)(x^2 + 2x + 3) + (x + 1)$$
$$g(x) = (x+1)x + 1$$

Do đó $f(x), g(x)$ nguyên tố cùng nhau. $(f(x), g(x)) = 1$.

Ta có

$$1 = g(x) - (x+1)x$$
$$= g(x) - [f(x) - g(x)(x^2+2x+3)]x$$
$$= -xf(x) + (x^3+2x^2+3x+1)g(x)$$
Vậy $r(x) = -x$ và $s(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

$$1 = -x(x^4+3x^3+6x^2+6x+4) + \left((x^3+2x^2+3x+1)(x^2+x+1)\right)$$

Câu 5.3 (2 điểm):

a) Giải phương trình $x^2 - 2x + 2 = 0$ trên trường số phức.

b) Hãy tính $f(i+1)$ với $f(x) = x^7 - 3x^5 + 9x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 3x + 1$

Giải: a) Ta có
$$x^2 - 2x + 2 = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x-1)^2 - i^2$$
$$= (x-1-i)(x-1+i)$$
Nên phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1 - i, x_2 = 1 + i$

b) Ta chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x) = x^2 - 2x + 2$ thì được

$$f(x) = g(x)P_5(x) + x - 1$$

Do $g(1+i) = 0$ nên
$$f(i+1) = (1+i) - 1 = i.$$
Tương tự
$$f(1-i) = (1-i) - 1 = -i.$$

Câu 5.4 (2 điểm): Trên trường $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ, tìm ước chung lớn nhất của
$$f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 1, g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2.$$

Hãy tìm hai đa thức $r(x)$ và $s(x)$ sao cho $d(x) = r(x)f(x) + s(x)g(x)$. Trong đó $d(x)$ là ước chung lớn nhất của $f(x)$ và $g(x)$.

$$f(x) = g(x)(x+1) + (2x^2 - x - 1)$$
$$g(x) = (2x^2 - x - 1)(x-1) + (2x+1)$$
$$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$$
Do đó $\left(f(x), g(x)\right) = 2x + 1$
$$2x + 1 = g(x) - (2x^2 - x - 1)(x-1) = g(x) - [f(x) - g(x)(x+1)](x-1)$$
$$2x + 1 = (-x+1)f(x) + x^2 g(x)$$
KL: $r(x) = -x + 1; s(x) = x^2$.

Câu 5.5 (2 điểm): Cho đa thức $A(x) = x^3 + x - 2$ với α, β là các nghiệm khác 1 của $A(x)$ trong $\mathbb{C}$.

a) Tính: $\alpha + \beta$ và $\alpha\beta$.

b) Tìm đa thức bậc hai $B(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $B(1) = 1, B(\alpha) = \beta, B(\beta) = \alpha$.

Giải:

$$x^3 + x - 2 = x^3 - 1 + x - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) + x - 1 =$$
$$= (x-1)(x^2 + x + 2)$$

Do $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$ nên $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 2$

Gọi $B(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ Ta có

$$\begin{cases} B(1) = 1 \\ B(\alpha) = \beta \\ B(\beta) = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a\alpha^2 + b\alpha + c = \beta \\ a\beta^2 + b\beta + c = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ -a + b = -1 \\ -3a - b + 2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = -\dfrac{1}{4} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$a\alpha^2 + b\alpha + c - (a\beta^2 + b\beta + c) = \beta - \alpha$$
$$a(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + b(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$$

$$a\alpha^2 + b\alpha + c + (a\beta^2 + b\beta + c) = \beta + \alpha$$
$$a(\alpha^2 + \beta^2) + b(\alpha + \beta) + 2c = \beta + \alpha$$

$$a[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] + b(\alpha + \beta) + 2c = \beta + \alpha$$
$$-3a - b + 2c = -1$$

Do đó

$$B(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

Câu 5.6 (2 điểm): Cho đa thức

$$P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 3.$$

a) Chứng tỏ $x = 1 + \sqrt{2}i$ là nghiệm của đa thức $P(x)$ trên $\mathbb{C}$.

b) Hãy phân tích $P(x)$ thành tích các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{R}[x]$.

Giải:

Do $P(x)$ là đa thức hệ số thực nếu có nghiệm $x = 1 + \sqrt{2}i$ thì cũng có nghiệm $x = 1 - \sqrt{2}i$ nên chia hết cho

$$\left(x - 1 - \sqrt{2}i\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}i\right) = x^2 - 2x + 3$$

Ta dùng phép chia hai đa thức với nhau thì có

$$P(x) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + x + 1)$$

Nên suy ra a) và b) (Vì hai đa thức bậc hai trong phân tích của đa thức $P(x)$ đều có biệt thức $\Delta < 0$).

Câu 5.7 (2 điểm): Cho đa thức

$$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 3.$$

a) Chứng tỏ $x = -1 + \sqrt{2}i$ là nghiệm của đa thức $P(x)$ trên $\mathbb{C}$.

b) Tìm các nghiệm còn lại của $P(x)$ trên $\mathbb{C}$.

Giải: a)

Do $P(x)$ là đa thức hệ số thực nếu có nghiệm $x = -1 + \sqrt{2}i$ thì cũng có nghiệm $x = -1 - \sqrt{2}i$ nên chia hết cho

$$(x + 1 - \sqrt{2}i)(x + 1 + \sqrt{2}i) = x^2 + 2x + 3$$

$$P(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - x + 1)$$

b) $P(x)$ có bốn nghiệm là:

$$-1 + \sqrt{2}i, -1 - \sqrt{2}i, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$$

$$= \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Câu 5.8 (2 điểm): Tìm đa thức $P(x)$ bậc 4 hệ số thực biết rằng trên trường số phức đa thức đó có hai nghiệm là $1 + 2i$ và $-i$. Từ đó chứng minh rằng $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 + (i - 1)x + i + 2$.

Giải: a)

$P(x)$ đa thức hệ số thực có hai nghiệm $1 + 2i, -i$ nên cũng có hai nghiệm là $1 - 2i, i$.

$$P(x) = k(x - i)(x + i)(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = k(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 5)$$

trong đó $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.

Ta có: $Q(x) = (x - i)(x - 1 + 2i)$

Do đó $P(x) \vdots Q(x)$ trên trường số phức.

Câu 5.9 (2 điểm): Cho $P(x) = x^2 + x + 1 - i$.

a) Tìm các nghiệm của $P(x)$ trên trường số phức.

b) Tìm đa thức $Q(x)$ bậc 4 trên trường số thực biết rằng $Q(x)$ chia hết cho $P(x)$.

Giải: a)

$$P(x) = (x - i)(x + i + 1)$$

$P(x)$ có hai nghiệm là $i, -1 - i$

b) Do $Q(x) \vdots P(x)$ và $Q(x)$ có hệ số thực nên $Q(x)$ có nghiệm $i, -1 - i$ và $-i, -1 + i$ trên $\mathbb{C}$.

$$Q(x) = k(x - i)(x + i)(x + i + 1)(x - i + 1) = k(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2), k \neq 0$$

Câu 5.10 (2 điểm): Cho $P(x) = x^2 + 2x + 1 + 2i$.

a) Tìm các nghiệm của $P(x)$ trên trường số phức.

b) Tìm đa thức $Q(x)$ bậc 4 trên trên trường số thực biết rằng $Q(x)$ chia hết cho $P(x)$.

Giải: a)

$$P(x) = x^2 + 2x + 1 + 2i = x^2 - i^2 + 2x + 2i = (x + i)(x + 2 - i)$$

$P(x)$ có hai nghiệm là $-i, -2 + i$.

b) Do $Q(x) \vdots P(x)$ và $Q(x)$ có hệ số thực nên $Q(x)$ có nghiệm $-i, -2 + i$ và $i, -2 - i$ trên $\mathbb{C}$

$$Q(x) = k(x - i)(x + i)(x + 2 + i)(x + 2 - i) = k(x^2 + 1)(x^2 + 4x + 5), k \neq 0$$

Câu 5.11 (2 điểm):

a) Tìm a, b sao cho đa thức $P(x) = x^3 + 8x^2 + 5x + a$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 + 3x + b$.

b) Phân tích đa thức $R(x) = x^4 - x^2 + 1$ thành tích các đa thức bất khả quy trên trường số phức.

Giải: a)

$x^3 + 8x^2 + 5x + a$	$x^2 + 3x + b$
$x^3 + 3x^2 + bx$	x
$5x^2 + (5 - b)x + a$	
$5x^2 + 15x + 5b$	5
$-(b + 10)x + a - 5b$	

Ta có $P(x) = x^3 + 8x^2 + 5x + a = (x + 5)(x^2 + 3x + b) - (b + 10)x + a - 5b$

Để $P(x) \vdots Q(x)$ thì $b = -10, a = -50$

b) $R(x) = x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 3x^2$

$$= \left(x^2 - \sqrt{3}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{3}x + 1\right)$$

$$= \left(x - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right).$$

Câu 5.12 (2 điểm): Hãy tìm những đa thức $U(x)$ và $V(x)$ có bậc thấp nhất sao cho $U(x)P(x) + V(x)Q(x) = D(x)$, ở đây $D(x)$ là ước chung lớn nhất của hai đa thức:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2; Q(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$$

Giải:

$$P(x) = Q(x) + (x^3 - 2x)$$
$$Q(x) = (x^3 - 2x)(x+1) + (x^2 - 2)$$
$$x^3 - 2x = (x^2 - 2)x$$

Vậy $\big(P(x), Q(x)\big) = x^2 - 2$

$$x^2 - 2 = Q(x) - (x^3 - 2x)(x+1) = Q(x) - \big(P(x) - Q(x)\big)(x+1)$$
$$= (-x-1)P(x) + (x+2)Q(x)$$

Vậy $U(x) = -x - 1, V(x) = x + 2$

Câu 5.13 (2 điểm): Cho hai đa thức:

$$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

a) Tìm ước số chung lớn nhất $S(x)$ của hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$.

b) Tìm hai đa thức $U(x)$ và $V(x)$ sao cho $U(x)P(x) + V(x)Q(x) = S(x)$.

Giải:

$$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = x^3(x+1) - 3x(x+1) - (x+1)$$
$$= (x+1)(x^3 - 3x - 1)$$
$$Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2-1) = (x+1)^2(x-1)$$

Do $\big((x^3 - 3x - 1), (x+1)(x-1)\big) = 1$ nên $\big(P(x), Q(x)\big) = x - 1$.

$$P(x) = Q(x).x + (-2x^2 - 3x - 1)$$
$$2Q(x) = (-2x^2 - 3x - 1)\left(-x + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)$$
$$-2x^2 - 3x - 1 = \left(-\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right)$$

Vậy $\big(P(x), Q(x)\big) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

$$-\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 2Q(x) - (-2x^2 - 3x - 1)\left(-x + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2Q(x) - \big(P(x) - x.Q(x)\big)\left(-x + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)P(x) + \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + 2\right)Q(x)$$

Vậy $U(x) = x - \frac{1}{2}, V(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x + 2$

Câu 5.14 (2 điểm):

a) Tìm đa thức bậc 3 có dạng $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ sao cho $P(x)$ chia hết cho $x - 1$, $P(x)$ chia cho $x + 1$ dư -16 và $P(x)$ chia cho $x + 2$ dư -60.

b) Phân tích $P(x)$ thành các đa thức bất khả quy trên trường số thực.

$$P(x) \vdots (x-1) \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b + c = 0$$
$$(P(x) + 16) \vdots (x+1) \Rightarrow P(-1) + 16 = 0 \Rightarrow a - b + c + 15 = 0$$

$$(P(x)+60) \vdots (x+2) \Rightarrow P(-2)+60=0 \Rightarrow 4a-2b+c+52=0$$

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ a-b+c=-15 \\ 4a-2b+c=-52 \end{cases}$$

$$a=-10, b=7, c=2$$

Câu 5.15 (2 điểm): Tìm đa thức bậc 3 có dạng $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ sao cho $P(x)$ chia hết cho $x-2$ và $P(x)$ chia cho x^2-1 thì dư $2x$.
Giải:

$$P(x) \vdots (x-2) \Rightarrow P(2)=8+4a+2b+c=0$$

$$P(x)-2x \vdots (x^2-1) \Rightarrow \begin{cases} P(1)-2=0 \\ P(-1)+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a+2b+c=-8 \\ a+b+c=1 \\ a-b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-10/3 \\ b=1 \\ c=10/3 \end{cases}$$

Vậy $P(x)=x^3-\frac{10}{3}x^2+x-\frac{10}{3}$.

Câu 5.16 (2 điểm): Cho hai đa thức

$$P(x)=x^5+x^4-9x^3+ax^2+bx+c, \qquad Q(x)=x^3+3x^2-4x-12.$$

a) Tìm các nghiệm của $Q(x)$ trên trường số thực.
b) Tìm a,b,c để $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.
Giải: a)
$Q(x)$ có 3 nghiệm là $x=2,-2,-3$

b) Do $P(x) \vdots Q(x)$ nên $P(2)=P(-2)=P(-3)=0$

$$\begin{cases} 4a+2b+c=24 \\ 4a-2b+c=-56 \\ 9a-3b+c=-81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=20 \\ c=-12 \end{cases}$$

Vậy $a=-1, b=20, c=-12$

Câu 5.17 (2 điểm): Tìm ước chung lớn nhất của hai đa thức

$$P(x)=(x-2)^{10}-(x-1)^5-1, \qquad Q(x)=x^2-3x+2.$$

Giải: Ta có

$$Q(x)=(x-1)(x-2)$$

Mặt khác, thế $x=1$ và $x=2$ vào biểu thức của $P(x)$ ta có

$$P(1)=0 \Leftrightarrow P(x) \vdots (x-1)$$

$$P(2)=-2 \Rightarrow P(x) \nmid (x-2)$$

Vậy $\big(P(x),Q(x)\big)=(x-1)$.

Câu 5.18 (2 điểm): Cho hai đa thức

$$P(x) = x^2 - 3x + 2, \qquad Q(x) = (x-2)^8 - (x-1)^4 - 1.$$

Tìm đa thức dư $R(x)$ trong phép chia $Q(x)$ cho $P(x)$.
Giải: Ta có

$$P(x) = (x-1)(x-2)$$

Mặt khác, thế $x = 1$ và $x = 2$ vào biểu thức của $Q(x)$ ta có

$$Q(1) = 0 \Rightarrow Q(x) \vdots (x-1) \Rightarrow Q(x) = (x-1)Q^{'}(x)$$
$$Q(2) = -2$$

Gọi $T(x)$ là đa thức thương trong phép chia $Q(x)$ cho $P(x)$

$$Q(x) = P(x).T(x) + R(x) \Leftrightarrow (x-1)Q^{'}(x) = (x-1)(x-2)T(x) + (x-1)R^{'}(x)$$
$$Q(2) = -2 \Rightarrow R^{'}(2) = -2$$

Do $R(x)$ bậc cao nhất là bậc 1 nên $R^{'}(x)$ có bậc 0 hay $R^{'}(x) = -2$. Vậy $R(x) = -2(x-1)$.

Câu 5.19 (2 điểm): Cho đa thức

$$P(x) = (x^2 + x + 1)^2 + 1.$$

a) Tìm các nghiệm của $P(x)$ trên trường số phức.

b) Hãy phân tích đa thức $P(x)$ thành các đa thức bất khả quy trên trường hệ số thực.
Giải: a) Ta có

$$(x^2 + x + 1)^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2 - i^2$$
$$= (x^2 + x + 1 - i)(x^2 + x + 1 + i)$$
$$= (x^2 - i^2 + x - i)(x^2 - i^2 + x + i)$$
$$= (x - i)(x + 1 + i)(x + i)(x + 1 - i)$$

Vậy các nghiệm của $P(x)$ trên trường số phức là $i, -i, -1 + i, -1 - i$.
b) Theo a) ta có

$$P(x) = (x - i)(x + i)(x + 1 + i)(x + 1 - i)$$
$$= (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)$$

Các đa thức bậc hai $x^2 + 1$ và $x^2 + 2x + 2$ có biệt thức $\Delta < 0$ nên là câc đa thức bất khả qui trên trường số thực.

Câu 5.20 (2 điểm): Cho hai đa thức:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + a, \qquad Q(x) = (x-1)(x^2 + bx + c).$$

Tìm giá trị của a, b, c để đa thức $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.
Giải: Nếu $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$, do $Q(x)$ chia hết cho $(x-1)$ nên

$$P(x) \vdots (x-1) \Rightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Khi đó

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + 3)$$

$P(x) \vdots Q(x) \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x+3) \vdots (x^2+bx+c)$
Vậy $a=3, b=2, c=3$.

$$(x+1)\big((x^2+bx+c)+(2-b)x+c-3\big) \vdots (x^2+bx+c)$$

Suy ra kq trên.

DUYỆT (Ký và ghi rõ họ tên)	CÁN BỘ PHẢN BIỆN (Ký và ghi rõ họ tên)	CÁN BỘ RA ĐỀ VÀ XÂY DỰNG ĐÁP ÁN (Ký và ghi rõ họ tên)
Ngô Nhân Đức	Bùi Văn Hiếu	Nguyễn Dư Thái